



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية
الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

دورة: 2023

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة: تسيير واقتصاد

المدة: 03 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n - \frac{6}{5}$

(1) برهن بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > -3$

(2) بين أن (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = u_n + 3$

(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{5}$ يُطلب تعيين حدّها الأول v_0

(ب) عيّن عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 5\left(\frac{3}{5}\right)^n - 3$

(ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) نضع: من أجل كل عدد طبيعي n ، $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

احسب S_n بدلالة n ثم بين أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $T_n = \frac{19}{2} - 3n - \frac{15}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1) (أ) حلّ في \mathbb{R} المعادلة $(1-x)(10x^2 + 9x - 1) = 0$

(ب) تحقّق أنه: من أجل كل عدد حقيقي x ، $10x^2 + 9x - 1 = (x+1)(10x-1)$

(2) (أ) استنتج في المجال $]0; +\infty[$ مجموعة حلول المعادلة $(1 - \ln x)(10(\ln x)^2 + 9(\ln x) - 1) = 0$

(ب) استنتج في \mathbb{R} مجموعة حلول المتراجحة $(1 - e^x)(10e^{2x} + 9e^x - 1) \leq 0$

(3) حلّ في المجال $]0; +\infty[$ المتراجحة $\ln(10x^2 + 9x) \geq 0$



التمرين الثالث: (04 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير.

(1) (u_n) المتتالية الحسابية التي حدّها الأول 3 وأساسها -4 . من أجل كلّ عدد طبيعي n :
أ) $u_n = 3 \times (-4)^n$ (أ) ب) $u_n = 3 - 4n$ (ب) ج) $u_n = 3 - 4(n-1)$ (ج)

(2) f الدالة المعرّفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = 1 + \ln(x+1)$
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$)
معادلة لمماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي:

أ) $y = x + 1$ (أ) ب) $y = x$ (ب) ج) $y = x - 1$ (ج)

(3) g الدالة المعرّفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 2x - \frac{1}{x}$

دالتها الأصلية G على المجال $]0; +\infty[$ والتي تتعدم من أجل القيمة 1 معرّفة بـ:

أ) $G(x) = x^2 + 1 - \ln x$ (أ) ب) $G(x) = -x^2 + 1 - \ln x$ (ب) ج) $G(x) = x^2 - 1 - \ln x$ (ج)

(4) القيمة المتوسطة للدالة $x \mapsto 3(x+1)^2$ على المجال $[0; 1]$ تساوي:

أ) 7 (أ) ب) 14 (ب) ج) 21 (ج)

التمرين الرابع: (08 نقاط)

f الدالة المعرّفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + 1 - \frac{3}{e^x + 1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$) (وحدة الطول 2 cm)

(1) بيّن أنّ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(2) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

(3) أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ ، $f'(x) = 1 + \frac{3e^x}{(e^x + 1)^2}$

ب) استنتج أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

(4) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,28 < \alpha < 0,29$

(5) ارسم (Δ) و (C_f)

(6) F الدالة المعرّفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $F(x) = 3x - 3\ln(e^x + 1)$

أ) تحقق أنّ F أصلية للدالة $x \mapsto \frac{3}{e^x + 1}$ على المجال $[0; +\infty[$

ب) احسب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ)

والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = 0$ و $x = \ln 2$



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$

(1) برهن بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 4$

(2) بين أن (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = u_n - 4$

(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ يُطلب تعيين حدّها الأول v_0

(ب) عيّن عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$

(ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) نضع: من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

احسب S_n بدلالة n ثم بين أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $T_n = 4n + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير.

(1) مجموعة الحلول في \mathbb{R} للمعادلة $e^{2x} + 4e^x - 5 = 0$ هي:

(أ) $\{0\}$ (ب) $\{1; 0\}$ (ج) $\{-5; 0\}$

(2) α عدد حقيقي و (u_n) المتتالية المعرفة بـ: $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 5u_n - 4$

تكون المتتالية (u_n) ثابتة من أجل:

(أ) $\alpha = 5$ (ب) $\alpha = -4$ (ج) $\alpha = 1$

(3) الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1}$

الدالة الأصلية F على \mathbb{R} للدالة f والتي تتعدم من أجل القيمة 0 معرفة بـ:

(أ) $F(x) = -2\ln(e^x + 1) + \ln 4$ (ب) $F(x) = 2\ln(e^x + 1) - \ln 4$ (ج) $F(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{2}\right)$

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1 - e^x)$ تساوي:

(أ) $-\infty$ (ب) $+\infty$ (ج) 0



التمرين الثالث: (04 نقاط)

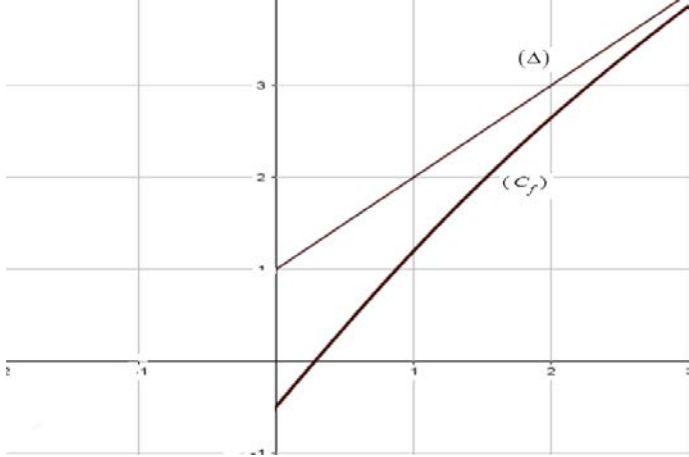
- (1) أ) تحقّق أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-2)(x^2 - 4x + 3)$
ب) حلّ في \mathbb{R} المعادلة $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
- (2) أ) استنتج في المجال $]0; +\infty[$ مجموعة حلول المعادلة $(\ln x)^3 - 6(\ln x)^2 + 11(\ln x) - 6 = 0$
ب) استنتج في \mathbb{R} مجموعة حلول المعادلة $e^{3x} - 6e^{2x} + 11e^x - 6 = 0$
- (3) حلّ في المجال $]2; +\infty[$ المتراجحة $\ln(x^3 - 6x^2 + 11x - 5) \geq 0$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

- f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x^2 - x - \ln x$
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- (1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسياً.
ب) بيّن أنّ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- (2) أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1)}{x}$
ب) استنتج أنّ الدالة f متناقصة تماماً على $]0; 1[$ و متزايدة تماماً على $]1; +\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيراتها.
- (3) عيّن معادلة لـ (T) المماس للمنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2
- (4) احسب $f(3)$ ثمّ ارسم (T) و (C_f)
- (5) F الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - x \ln x$
أ) تحقّق أنّ F أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$
ب) احسب مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x=1$ و $x=3$

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)
مجموع	مجزأة	
التمرين الأول (04 نقاط)		
1	0.25 0.75	البرهان بالتراجع: التحقق من صحة الخاصية الابتدائية إثبات صحة الاستلزام (إثبات أن الخاصية وراثية)
0.5	0.25 0.25	من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{5}(u_n + 3)$ و $u_n + 3 > 0$ إذن (u_n) متناقصة تماما (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة
1.75	2 × 0.25 0.5 0.5 0.25	أ) من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = \frac{3}{5}v_n$ ، $v_0 = 5$ ب) من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 5\left(\frac{3}{5}\right)^n$ من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 5\left(\frac{3}{5}\right)^n - 3$ ج) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -3$ لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$
0.75	2 × 0.25 0.25	من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{25}{2} \left[1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \right]$ $T_n = S_n - 3(n+1) = \frac{19}{2} - 3n - \frac{15}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^n$
التمرين الثاني (04 نقاط)		
1.75	4x0.25 0.75	أ) $\Delta = 121$ ، مجموعة حلول المعادلة هي : $\left\{ -1 ; \frac{1}{10} ; 1 \right\}$ ب) من أجل كل عدد حقيقي x ، $10x^2 + 9x - 1 = (x+1)(10x-1)$
1.5	3x0.25 0.25 0.25 0.25	أ) مجموعة حلول المعادلة هي : $\left\{ e^{-1} ; e^{\frac{1}{10}} ; e^1 \right\}$ ب) $(1 - e^x)(e^x + 1)(10e^x - 1) \leq 0$ تكافئ $(1 - e^x)(10e^{2x} + 9e^x - 1) \leq 0$ إشارة $(1 - e^x)(10e^x - 1)$ مجموعة الحلول هي $]-\infty; -\ln 10] \cup [0; +\infty[$

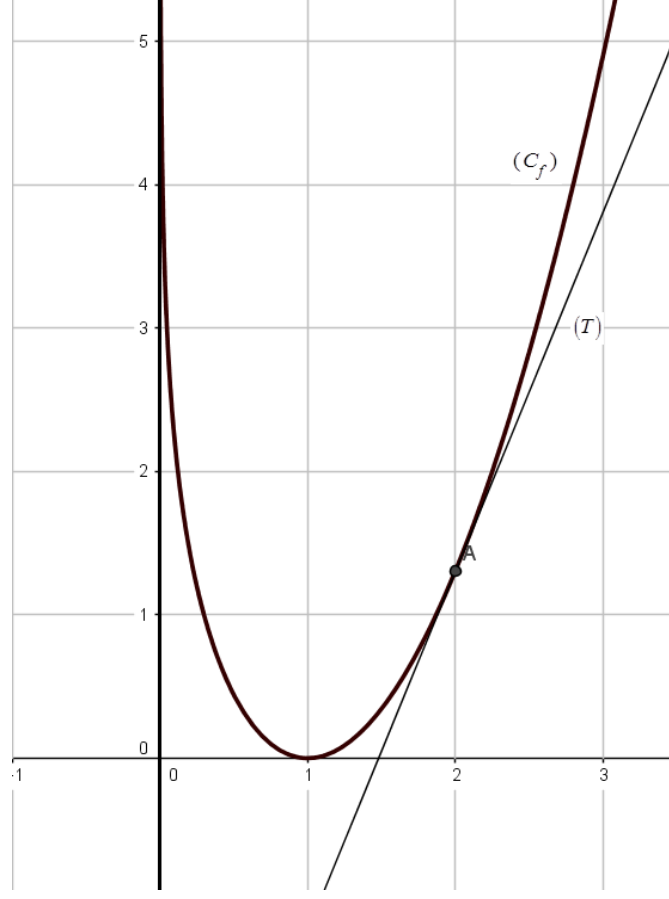
0.75	0.25	$10x^2 + 9x - 1 \geq 0$ تكافئ $\ln(10x^2 + 9x) \geq 0$ إشارة $10x^2 + 9x - 1$ من أجل x حقيقي موجب تماما مجموعة الحلول هي $\left[\frac{1}{10}; +\infty\right[$	3
	0.25		
	0.25		
التمرين الثالث (04 نقاط)			
1	0.5	الاقتراح الصحيح هو : (ب)	1
	0.5	تبرير : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = u_{n-1} + nr$ ، $u_n = 3 - 4n$	
1	0.5	الاقتراح الصحيح هو : (أ)	2
	0.5	تبرير : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ ومنه $y = x + 1$	
1	0.5	الاقتراح الصحيح هو : (ج)	3
	0.5	تبرير : عبارة الدالة الاصلية للدالة g التي تتعدم عند القيمة 1 هي $G(x) = x^2 - \ln x - 1$	
1	0.5	الاقتراح الصحيح هو : (أ)	4
	0.5	تبرير : $\frac{1}{1-0} \int_0^1 3(x+1)^2 dx = \left[(x+1)^3 \right]_0^1 = 7$	
التمرين الرابع (08 نقاط)			
0.5	0.5	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3}{e^x + 1}\right) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	1
1	0.5	(أ) المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3}{e^x + 1}\right) = 0$	2
	0.25	(ب) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ ، $\frac{-3}{e^x + 1} < 0$ ،	
	0.25	(C_f) يقع أسفل (Δ)	

3	1	أ) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ ، $f'(x) = 1 + \frac{3e^x}{(e^x + 1)^2}$	3									
	1	ب) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ ، $f'(x) > 0$ ، الذالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ جدول التغيرات										
	1	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td></td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>$-\frac{1}{2}$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> </tbody> </table>	x	0	$+\infty$	$f'(x)$		+	$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	
x	0	$+\infty$										
$f'(x)$		+										
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$										
1	1	المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,28 < \alpha < 0,29$ لأن : الذالة f مستمرة ومنتزيدة تماما على $[0,28 ; 0,29]$ و $f(0,29) \times f(0,28) < 0$ و $(f(0,29) \approx 0,006$ ، $f(0,28) \approx -0,001)$	4									
1	0.25 0.75		5									
1.5	1	أ) F تقبل الاشتقاق على $[0; +\infty[$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$ ، $F'(x) = \frac{3}{e^x + 1}$	6									
	2×0.25	ب) حساب المساحة $\int_0^{\ln 2} (x+1-f(x)) dx = [F(x)]_0^{\ln 2} = 4 \ln\left(\frac{64}{27}\right) cm^2$										

ملاحظة: تُقبل وتُراعى جميع الطرائق الصحيحة الأخرى مع التقيد التام بسلم التنقيط

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
مجموع	مجزأة	
التمرين الأول (04 نقاط)		
1	0.25 0.75	1 البرهان بالتراجع: التحقق من صحة الخاصية الابتدائية إثبات صحة الاستلزام (إثبات أنّ الخاصية وراثية)
0.5	0.25 0.25	2 من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{4}(u_n - 4)$ و $u_n - 4 < 0$ إذن (u_n) متزايدة تماما (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى وبالتالي فهي متقاربة
1.75	2×0.25 0.5 0.5 0.25	3 (أ) من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$ و $v_0 = -2$ (ب) من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $v_n = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n$ من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$ (ج) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ لأن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$
0.75	0.5 0.25	4 من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $S_n = -\frac{8}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$ من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $T_n = S_n + 4(n+1) = 4n + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$
التمرين الثاني (04 نقاط)		
1	0.5 0.5	1 الاقتراح الصحيح هو : (أ) تبرير : $e^{2x} + 4e^x - 5 = 0$ تكافئ $(e^x + 5)(e^x - 1) = 0$ ومنه : $x = 0$
1	0.5 0.5	2 الاقتراح الصحيح هو : (ج) تبرير : $\alpha = 5\alpha - 4$ تكافئ $\alpha = 1$
1	0.5 0.5	3 الاقتراح الصحيح هو : (ب) تبرير : من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $F'(x) = f(x)$ و $F(0) = 0$

1	0.5	الإقتراح الصحيح هو : أ)	4
	0.5	تبرير : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1 - e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty$	
التمرين الثالث (04 نقاط)			
2	1	أ) من أجل كل عدد حقيقي x ، $(x-2)(x^2 - 4x + 3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ،	1
	4x0.25	ب) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ تكافئ $(x-2)(x^2 - 4x + 3) = 0$ ، $\Delta = 4$ ، مجموعة الحلول هي : $\{1; 2; 3\}$	
1.5	3x0.25	أ) مجموعة الحلول هي : $\{e^1; e^2; e^3\}$	2
	3x0.25	ب) $e^{3x} - 6e^{2x} + 11e^x - 6 = 0$ تكافئ $(e^x - 1)(e^x - 2)(e^x - 3) = 0$ ، مجموعة الحلول هي $\{0; \ln 2; \ln 3\}$	
0.5	0.25	أ) $\ln(x^3 - 6x^2 + 11x - 5) \geq 0$ تكافئ $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \geq 0$ ،	3
	0.25	إشارة $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ من أجل x حقيقي من المجال $]2; +\infty[$ مجموعة الحلول هي $[3; +\infty[$	
التمرين الرابع (08 نقاط)			
1.75	0.75	أ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$	1
	0.25	المنحني (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة $x=0$ مقاربا له	
	0.75	ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(x - 1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$	
2	1	أ) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1)}{x}$ ،	2
	0.5	ب) إشارة $f'(x)$	
2.75	0.5	الدالة f متناقصة تماما على $]0; 1]$ و متزايدة تماما على $[1; +\infty[$	جدول التغيرات
	0.75	جدول التغيرات	

1	2×0.5	معادلة لـ (T) هي: $y = f'(2)(x-2) + f(2) = \frac{5}{2}x - 3 - \ln 2$	3
1	0.25		4
	0.25		رسم (T)
	0.5		رسم (C _f)
1.5	1	أ) F تقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ ، $F'(x) = x^2 - x - \ln x$	5
	2×0.25	ب) $\int_1^3 f(x) dx = [F(x)]_1^3 = \left(\frac{20}{3} - 3\ln 3\right) u.a$	

ملاحظة: تُقبل و تُراعى جميع الطرائق الصحيحة الأخرى مع التقيد التام بسلم التنقيط