



دورة: 2021

المدة: 03 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1$

1 أ . احسب الحدود u_0 ، u_1 و u_2

ب. تَحَقَّقْ أَنَّهُ من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

ج. استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

2 من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n - 1$

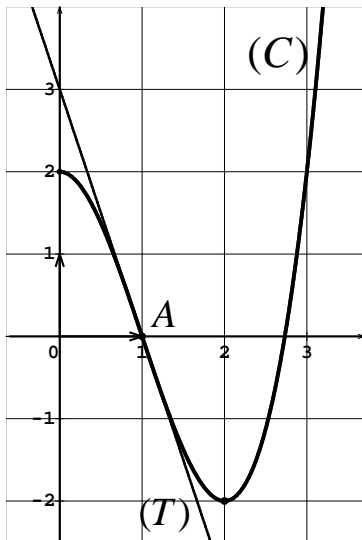
أ . احسب v_0 ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n

ب. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

3 من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

أ . احسب بدلالة n عبارة S_n

ب. استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S'_n = n + \frac{11}{3} - \frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$



التمرين الثاني: (04 نقاط)

الدالة العددية g معرفة على $[0; +\infty[$ بتمثيلها البياني (C)

(T) المماس للمنحنى (C) في النقطة $A(1; 0)$ (الشكل المقابل)

أجب بصح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية :

1 العددين $g(2)$ و $g(3)$ مختلفان في الإشارة.

2 من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; 2[$: $g'(x) > 0$

3 معامل توجيه المماس (T) يساوي: -3

4 كل دالة أصلية G للدالة g على $[0; +\infty[$ متزايدة تماما على $[0; 2]$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التبرير.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2x+1}{1+x+x^2} \right) \text{ هي:}$$

أ) 0 ب) -2 ج) 1

(2) عبارة الحدّ العام للمتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} بعدها الأول 2 و أساسها $\frac{1}{2}$ هي:

أ) $2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ب) $2 + \frac{1}{2}n$ ج) $2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(3) الدالة العددية h معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = 2x - 1 + \frac{3}{x}$ ، تمثيلها البياني (C) في مستو

منسوب إلى معلم يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته هي:

أ) $y = 2x - 1$ ب) $y = 2x$ ج) $y = 2x + 1$

(4) الدالة العددية g معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x^2}$

دالتها الأصلية G على $]0; +\infty[$ التي تتعدم من أجل القيمة 1 معرفة بـ:

أ) $G(x) = x^2 + x - \frac{1}{x}$ ب) $G(x) = x^2 + x - 1 - \frac{1}{x}$ ج) $G(x) = x^2 + x + \frac{1}{x} - 3$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

الدالة العددية f معرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ. بين أنّ f دالة زوجية.

ب. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفيسر النتيجة هندسيا.

ج. ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 1$

(2) أ. بين أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{10x}{(x^2 + 1)^2}$.

ب. استنتج أنّ f متناقصة تماما على $]0; +\infty[$ ومتزايدة تماما على $]-\infty; 0[$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) أ. اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 2

ب. جد إحداثيات نقطتي تقاطع (C) مع حامل محور الفواصل.

(4) ارسم (Δ) ، (T) و (C)

(5) الدالة العددية g معرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = \frac{|x^2 - 4|}{x^2 + 1}$ ، (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ. بين أنّ: من أجل كلّ x من $]2; +\infty[\cup]-\infty; -2]$ ، $g(x) = f(x)$ ،

و من أجل كلّ x من $[-2; 2]$: $g(x) = -f(x)$

ب. شكّل جدول تغيرات الدالة g

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة على \mathbb{N} بحدّها الأول $u_0 = 5$ حيث: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ و

(1) أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$ ،

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ،

ج. استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

(2) من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n - 3$

أ. احسب v_0 ثمّ اكتب عبارة v_n بدلالة n

ب. بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$

(3) من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

أ. احسب بدلالة n عبارة S_n

ب. استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $S'_n = 3n + 6 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ،

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الدالة العددية f معرفة على $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ بجدول تغيّراتها المقابل.

(C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		- 0 +	
$f(x)$	-1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

أجب بصح أو خطأ مع التبرير في كلّ حالة من الحالات التالية:

(1) $y = -1$ هي معادلة للمستقيم المقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

(2) معامل توجيه المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة A ذات الفاصلة 1 يساوي 0

(3) النقطة $B(3; 1)$ تنتمي إلى (C)

(4) $f(1442) < f(2021)$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لكلّ سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عينه مع التبرير.

(1) الدالة العددية f المعرفة على $]-2; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ ، دالتها المشتقة f' معرفة بـ:

(أ) $f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2}$ (ب) $f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$ (ج) $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$

(2) الدالة العددية g معرفة على المجال $]2; +\infty[$ بـ: $g(x) = 1 + \frac{3}{x-2}$

و (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم.

معادلة المماس لـ (C_g) في النقطة ذات الفاصلة 3 هي:

(أ) $y = 3x - 5$ (ب) $y = -3x + 13$ (ج) $y = -3x + 5$

(3) a عدد حقيقي، الأعداد a ، $a+2$ ، $a+6$ بهذا الترتيب هي حدود متتابعة لمتتالية هندسية من أجل:

(أ) $a = 2$ (ب) $a = -2$ (ج) $a = 4$

(4) المتتالية الحسابية (v_n) معرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = 2n + 1$ ، نضع: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

من أجل كل عدد طبيعي n المجموع S_n يساوي:

(أ) n^2 (ب) $(n+1)^2$ (ج) $\frac{n(n+1)}{2}$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

الدالة العددية f معرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x^2 + x + 2}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة 2 cm)

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجتين هندسيا.

(2) من أجل كل x من \mathbb{R} نضع: $g(x) = f(x) - 1$

أ. ادرس حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

ب. استنتج وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 1$

(3) أ. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{2(x+1)(x-3)}{(x^2+x+2)^2}$

ب. بين أن f متزايدة تماما على كل من $]-\infty; -1]$ و $[3; +\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-1; 3]$

ج. شكّل جدول تغيرات الدالة f

(4) أ. اكتب معادلة لـ (T) مماس المنحني (C) في النقطة التي فاصلتها 1

ب. تحقّق أنّ (T) يقطع (C) في النقطة $A(-2; \frac{5}{2})$

(5) ارسم (Δ) ، (T) و (C)

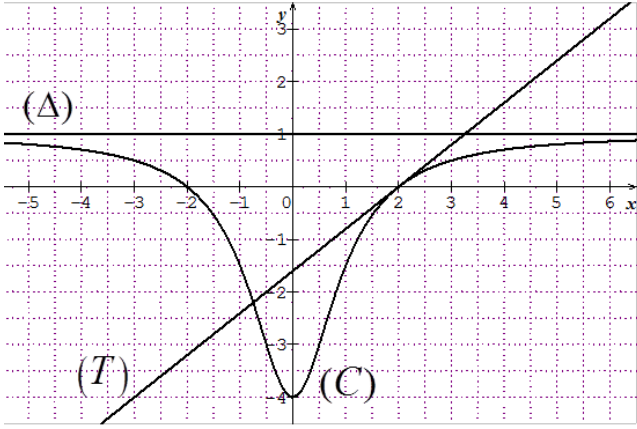
(6) الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ: $h(x) = \frac{x^2 - |x| + 4}{x^2 + |x| + 2}$ ، (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ. بين أن الدالة h زوجية.

ب. تحقّق أنه من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$: $h(x) = f(x)$

ج. اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C) و ارسمه.

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)
مجموعة	مجزأة	
التمرين الأول: (04 نقاط)		
01,75	0,25x3	1) أ . حساب: u_0 ، u_1 و u_2
	0.50	ب. التَّحَقَّق أنَّ : $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$
	0.50	ج. (u_n) متناقصة تماما.
01,25	0,25	2) أ . $v_0 = 2$
	0,50	عبارة v_n بدلالة n : $v_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n$
	0,50	ب (v_n) متتالية هندسيّة أساسها $\frac{1}{4}$: $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$
01,00	0.75	3) أ . $S_n = \frac{8}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$
	0.25	ب. $S'_n = S_n + n + 1 = n + \frac{11}{3} - \frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$
التمرين الثاني: (04 نقاط)		
01,00	0,50x2	1) صح ، التبرير .
01,00	0,50x2	2) خطأ ، التبرير .
01,00	0,50x2	3) صح ، التبرير .
01,00	0,50x2	4) خطأ ، التبرير .
التمرين الثالث: (04 نقاط)		
01,00	0,50x2	1) الجواب الصحيح (أ) ، التبرير .
01,00	0,50x2	2) الجواب الصحيح (ب) ، التبرير .
01,00	0,50x2	3) الجواب الصحيح (أ) ، التبرير .
01,00	0,50x2	4) الجواب الصحيح (ج) ، التبرير .
التمرين الرابع: (08 نقاط)		
02,50	0.50	1) أ . f دالة زوجية
	0,50x2	ب. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$
	0,25	المستقيم ذو المعادلة : $y = 1$ مقارب لـ (C)
	0,50	ج. لدينا: من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $f(x) - 1 = -\frac{5}{x^2 + 1}$
	0,25	و منه (C) أسفل (Δ)

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)												
مجموعة	مجزأة													
02,25	0,75	2 أ. $f'(x) = \frac{10x}{(x^2 + 1)^2}$												
	0,50	ب. $f'(x)$ من إشارة $10x$												
	0,50	f متناقصة تماما على $]-\infty; 0]$ و متزايدة تماما على $[0; +\infty[$ جدول تغيّرات f :												
	0,50	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>1</td> <td></td> <td>1</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f'(x)$	-	0	+	$f(x)$	1		1
x	$-\infty$	0	$+\infty$											
$f'(x)$	-	0	+											
$f(x)$	1		1											
01,50	0,75	3 أ. $y = \frac{4}{5}x - \frac{8}{5}$ هي معادلة (T) المماس لـ (C) في النقطة التي فاصلتها 2												
	0,50	ب. $f(x) = 0$ تكافئ $(x = 2)$ أو $(x = -2)$												
	0,25	إحداثيات نقطتي تقاطع (C) مع حامل محور الفواصل هي $(2; 0)$ و $(-2; 0)$												
01,00	0,25x2	4 رسم (Δ) ، (T)												
	0,50													
00,75	0,50	5 أ. - دراسة إشارة $x^2 - 4$ وكتابة $ x^2 - 4 $ دون رمز القيمة المطلقة. - من أجل كلّ x من $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$ ، $g(x) = f(x)$ - من أجل كلّ x من $[-2; 2]$: $g(x) = -f(x)$												
	0,25	ب. تشكيل جدول تغيّرات g												
		<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>-2</td> <td>0</td> <td>2</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$g(x)$</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>4</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	$g(x)$	1	0	4	0	1
x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$									
$g(x)$	1	0	4	0	1									

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
مجموعة	مجزأة	
التمرين الأول: (04 نقاط)		
1.75	0.50+0.25	1) أ . البرهان بالتراجع : $u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$
	0.50	ب. $u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$
	0.50	ج. المتتالية (u_n) متناقصة تماما.
01.50	0.50+0.25	2) أ . $v_0 = 2$ و $v_n = u_n - 3 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$
	0,75	ب. (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$
0.75	0.50	3) أ . $S_n = 3 \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right]$
	0,25	ب. $S'_n = S_n + 3(n+1) = 3n + 6 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$
التمرين الثاني: (04 نقاط)		
01,00	0,50x2	1) خطأ ، التبرير .
01,00	0,50x2	2) صح ، التبرير .
01,00	0,50x2	3) خطأ ، التبرير .
01,00	0,50x2	4) صح ، التبرير .
التمرين الثالث: (04 نقاط)		
01,00	0,50x2	1) الإجابة الصحيحة (ج) ، التبرير .
01,00	0,50x2	2) الإجابة الصحيحة (ب) ، التبرير .
01,00	0,50x2	3) الإجابة الصحيحة (أ) ، التبرير .
01,00	0,50x2	4) الإجابة الصحيحة (ب) ، التبرير .

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)																	
مجموعة	مجزأة																		
التمرين الرابع: (08 نقاط)																			
01,25	0,50x2 0,25	(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ ، المستقيم ذو المعادلة : $y = 1$ مقارب لـ (C)																	
01,25	0,25x3 0,25x2	(2) أ . $g(x) > 0$ على $]-\infty; 1[$ و $g(x) < 0$ على $]1; +\infty[$ و $g(1) = 0$ ب. استنتاج وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)																	
02,25	0,75	(3) أ . $f'(x) = \frac{2(x+1)(x-3)}{(x^2+x+2)^2}$																	
	0,50	ب. إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $2(x+1)(x-3)$																	
	0,50	f متزايدة تماما على كل من $]-\infty; -1[$ ، $]3; +\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-1; 3[$ ج . جدول تغيرات f																	
	0,50	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>-1</td> <td>3</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td></td> <td>↗</td> <td>↘</td> <td>↗</td> <td></td> </tr> </table>	x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	$f'(x)$	+	0	-	0	+	$f(x)$		↗	↘	↗	
x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$															
$f'(x)$	+	0	-	0	+														
$f(x)$		↗	↘	↗															
01,25	0,75	(4) أ . كتابة معادلة لـ (T) : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$																	
	0,50	ب. التحقق أن (T) يقطع (C) في النقطة $A(-2; \frac{5}{2})$.																	
	2x0,25	(5) رسم (Δ) ، (T) رسم (C)																	
01,00	0,50																		

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
مجموعة	مجزأة	
01.00	0.25	6 أ. h زوجية.
	0,25	ب. التَّحَقَّقْ أَنَّهُ من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$: $h(x) = f(x)$
	0,25	ج. شرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C)
	0.25	رسم (C_h)