

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

**التمرين الأول: (04 نقاط)**

في رف من رفوف مكتبة "ثانوية النجاح"، يوجد 150 كتاب رياضيات و 50 كتاب فلسفة، حيث 40% من كتب الرياضيات و 70% من كتب الفلسفة تخص شعبة التسيير والاقتصاد.

نختار عشوائيا من الرف كتابا واحدا.

عين مع التبرير، الجواب الصحيح الوحيد من بين الأجوبة المقترحة، في كل حالة من الحالات التالية:

(1) احتمال أن يكون الكتاب المختار كتاب رياضيات هو:

$$(أ) \frac{3}{4} \quad (ب) \frac{2}{5} \quad (ج) \frac{1}{150}$$

(2) احتمال أن يكون الكتاب المختار خاصا بشعبة التسيير والاقتصاد هو:

$$(أ) 0,24 \quad (ب) 0,475 \quad (ج) 0,21$$

(3) احتمال أن يكون الكتاب المختار كتاب رياضيات خاصا بشعبة التسيير والاقتصاد هو:

$$(أ) 0,15 \quad (ب) 0,4 \quad (ج) 0,3$$

(4) إذا كان الكتاب المختار يخص شعبة التسيير والاقتصاد، فإن احتمال أن يكون كتاب رياضيات هو:

$$(أ) \frac{2}{75} \quad (ب) \frac{12}{19} \quad (ج) \frac{3}{10}$$

**التمرين الثاني: (04 نقاط)**

الجدول التالي يعطي تطور النسب المئوية من ميزانية إحدى الجامعات، والمخصّصة للإنفاق على البحث

العلمي بين سنتي 2005 و 2012:

السنة	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
رتبة السنة $x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8
النسبة المئوية $y_i$ %	3,3	3,8	4,5	4,7	5	5,2	5,7	6,2

(1) مثل سحابة النقط  $M_i(x_i; y_i)$  في معلم متعامد.

(2) جد إحداثيتي  $G$  النقطة المتوسطة لسحابة النقط، ثم مثلها.

3) بيّن أنّ المعادلة المختصرة لمستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا هي:  $y = 0,38x + 3,09$ ، ثمّ ارسمه.

4) بفرض أنّ تغيّر النسب المئوية يبقى على هذه الوتيرة في السنوات القادمة.

أ- قدر النسبة المئوية لإنفاق هذه الجامعة على البحث العلمي في سنة 2015.

ب- في أية سنة تصبح النسبة المئوية المتوقعة للإنفاق على البحث العلمي لهذه الجامعة هي 9,93% ؟

### التمرين الثالث: (05 نقاط)

$(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بـ:  $u_0 = 3$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ :

$$u_{n+1} = \left(\frac{2a+1}{3}\right)u_n - \frac{2a+4}{3} \text{ ؛ حيث } a \text{ وسيط حقيقي.}$$

1- عيّن قيمة  $a$  التي من أجلها تكون المتتالية  $(u_n)$  ثابتة.

2- نفرض  $a \neq \frac{5}{2}$ . عيّن قيمة  $a$  حتى تكون المتتالية  $(u_n)$  حسابية، ثمّ احسب عندئذ  $u_n$  ومجموع  $n$  حدا الأولى من المتتالية.

3- عيّن قيمة  $a$  حتى تكون المتتالية  $(u_n)$  هندسية، ثمّ عيّن في هذه الحالة كلا من  $u_{50}$  ومجموع 50 حدا الأولى منها.

4- نفرض  $a = 4$ . برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ، فإنّ:  $u_n = 3^n + 2$ ، ثمّ بيّن أنّ:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 4n + 3)$$

### التمرين الرابع: (07 نقاط)

الدالة العددية  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}^*$  كما يلي:  $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1- أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ . فسّر النتيجةين هندسياً.

ب) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

2- أ) بيّن أنّ المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = 2x - 1$ ، مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$ .

ب) تحقق أنّه، من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير معدوم، فإنّ:  $f(x) = 2x - 2 + \frac{e^x}{e^x - 1}$ ، ثمّ استنتج أنّ

المستقيم  $(\Delta')$  ذا المعادلة  $y = 2x - 2$ ، مقارب للمنحنى  $(C_f)$ .

3- بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير معدوم، فإنّ:  $f'(x) = \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2}$ .

استنتج اتجاه تغيّر الدالة  $f$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4- مثلّ بيانياً كلا من  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  و  $(C_f)$ .

5- احسب العدد:  $\int_1^2 f(x) dx$ ، ثمّ فسره هندسياً.

## الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

(1) المتتالية العددية المعرفة بـ:  $u_0 = 6$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 6$ .

أ- احسب الحدود:  $u_1$ ،  $u_2$ ،  $u_3$  و  $u_4$ .

ب- هل المتتالية  $(u_n)$  رتيبة على  $\mathbb{N}$ ؟ برّر إجابتك.

(2) أ- بيّن أنه، من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)$ .

ب- استنتج أن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $v_n = u_n - 4$  هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ج) اكتب  $v_n$ ، ثم  $u_n$  بدلالة  $n$ .

د) بيّن أن  $(u_n)$  متقاربة.

(3) باستعمال عبارة  $u_n$ ، تأكد ثانية من نتيجة السؤال (1) ب.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

وُضِعَت أسئلة امتحان شفوي في علبتين ممتاليتين  $A$  و  $B$ . العلبة  $A$  تحتوي على 4 أسئلة في الثقافة العامة،

و 6 أسئلة في مادة الاختصاص؛ والعلبة  $B$  تحتوي على 3 أسئلة في الثقافة العامة، و 7 أسئلة في مادة

الاختصاص. (عمليات سحب الأسئلة واختيار إحدى العلبتين متساوية الاحتمال)

(1) يختار مترشح إحدى العلبتين ليسحب منها عشوائياً، سؤالاً واحداً.

أ- شكّل شجرة الاحتمالات المتوازنة.

ب- ما هو احتمال سحب المترشح لسؤال في مادة الاختصاص من العلبة  $A$ ؟

ج- ما هو احتمال سحب المترشح لسؤال في مادة الاختصاص من العلبة  $B$ ؟

د- ما هو احتمال سحب المترشح لسؤال في مادة الاختصاص؟

هـ- علماً أن المترشح سحب سؤالاً في الثقافة العامة، ما احتمال أن يكون من العلبة  $B$ ؟

(2) مترشح آخر يسحب عشوائياً سؤالاً واحداً من العلبة  $A$  وسؤالاً واحداً من العلبة  $B$ .

بيّن أن احتمال سحب سؤالين في مادة الاختصاص هو 0,42.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الجدول التالي يعطي تطور عدد مستعملي الهاتف النقال في مدينة ما من سنة 2006 إلى سنة 2012:

السنة	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
رتبة السنة $x_i$	1	2	3	4	5	6	7
عدد المستعملين $y_i$	21400	32400	48000	75600	121200	207000	280000

(1) أ- مثل سحابة النقط  $M_i(x_i; y_i)$  في معلم متعامد (نأخذ على محور الفواصل  $1cm$  لكل سنة وعلى

محور الترتيب  $1cm$  لكل 20000 مستعمل).

ب- هل يمكن تسوية سحابة النقط السابقة بتعديل خطي؟ برّر إجابتك.

(2) بوضع:  $z_i = \ln y_i$  من أجل  $i \in \{1;2;3;4;5;6;7\}$ . (تدور النتائج إلى  $10^{-2}$ )

أ- أنقل الجدول التالي على ورقة الإجابة، ثم أكمله:

$x_i$	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$							

ب- مثل سحابة النقط  $M'_i(x_i; z_i)$  في معلم متعامد آخر مبدؤه  $O'(0;9)$  وبوحدة  $1cm$  لكل سنة على

محور الفواصل و  $5cm$  لكل وحدة على محور الترتيب.

ج- جد إحداثيتي  $G$  النقطة المتوسطة لسحابة النقط  $M'_i(x_i; z_i)$ .

د- بين أن معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا للسلسلة  $(x_i; z_i)$  هي:  $z = 0,44x + 9,51$ .

(3) أ- تحقق أن:  $y = k e^{0,44x}$ ، حيث  $k$  عدد حقيقي يطلب تعيينه. (تدور النتيجة إلى الوحدة)

ب- بفرض أن عدد مستعملي الهاتف النقال بهذه المدينة يتزايد بنفس الوتيرة، قدر عددهم سنة 2014.

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

(I) الدالة العددية  $g$  معرفة على  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $g(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{x^2}$ .

(1) عيّن، تبعا لقيم  $x$ ، إشارة  $g(x)$ .

(2) أ- تحقق أنه، من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$ ،  $g(x) = -1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$ .

ب- استنتج الدوال الأصلية للدالة  $g$  على  $]0; +\infty[$ .

(II) الدالة العددية  $f$  معرفة على المجال  $]0; 8]$  كما يلي:  $f(x) = 3 - x - \frac{2}{x} + \ln x$ .

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أ- تحقق أن  $f$  هي الدالة الأصلية للدالة  $g$  على المجال  $]0; 8]$  والتي تتعدم عند 1.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $]0; 8]$ .

ج- احسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

د- شكّل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

(2) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين، أحدهما  $\alpha$ ، حيث:  $3,8 < \alpha < 3,9$ .

(3) مثلّ بيانيا  $(C_f)$ .

(III) الدالة العددية  $h$  معرفة على  $]-\frac{2}{3}; 2]$  كما يلي:  $h(x) = f(3x + 2)$ .

(1) بين أنه إذا كان  $-\frac{2}{3} < x \leq 0$  فإن  $0 < 3x + 2 \leq 2$  وإذا كان  $0 \leq x \leq 2$  فإن  $2 \leq 3x + 2 \leq 8$ .

(2) احسب  $h'(x)$ . (عبارة  $h(x)$  غير مطلوبة)

(3) شكّل جدول تغيرات  $h$ .

العلامة		عناصر الإجابة															
مجموع	مجزأة																
04	1	<p><b>التمرين الأول: (04 نقط)</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>السؤال</th> <th>الجواب</th> <th>التبرير</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>أ</td> <td><math>p_1 = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}</math></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>ب</td> <td><math>p_2 = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{7}{10} = 0,475</math></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>ح</td> <td><math>p_3 = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = 0,3</math></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>ب</td> <td><math>p_4 = \frac{0,3}{\frac{19}{40}} = \frac{12}{19}</math></td> </tr> </tbody> </table>	السؤال	الجواب	التبرير	1	أ	$p_1 = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$	2	ب	$p_2 = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{7}{10} = 0,475$	3	ح	$p_3 = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = 0,3$	4	ب	$p_4 = \frac{0,3}{\frac{19}{40}} = \frac{12}{19}$
	السؤال		الجواب	التبرير													
	1		أ	$p_1 = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$													
	2		ب	$p_2 = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{7}{10} = 0,475$													
3	ح	$p_3 = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = 0,3$															
4	ب	$p_4 = \frac{0,3}{\frac{19}{40}} = \frac{12}{19}$															
1	1																
1	1																
1	1																
04	1	<p><b>التمرين الثاني: (04 نقط)</b></p> <p>(1) تمثيل سحابة النقط .....</p> <p>(2) <math>G(4,5 ; 4,8)</math> ، تمثيلها .....</p> <p>(3) <math>a = \frac{\frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i y_i - \bar{x} \bar{y}}{\frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i^2 - \bar{x}^2} = 0,38</math> ، <math>b = \bar{y} - a\bar{x} = 3,09</math> ، <math>(y = 0,38x + 3,09)</math> .....</p> <p>رسم المستقيم .....</p> <p>(4) أ) <math>x = 11</math> (رتبة 2015) ومنه <math>y = 7,27</math> ، النسبة المئوية 7,27% .....</p> <p>ب) <math>y = 9,93</math> نجد <math>x = 18</math> أي سنة 2022 .....</p>															
	3×0.25																
	0.75+0.25																
	0.25																
05	0.5	<p><b>التمرين الثالث: (05 نقط)</b></p> <p>(1) من <math>u_{n+1} = u_n = 3</math> نجد <math>a = \frac{5}{2}</math> .....</p> <p>(2) <math>(u_n)</math> حسابية معناه <math>\frac{2a+1}{3} = 1</math> ومنه <math>a = 1</math> ، <math>u_n = 3 - 2n</math> ، <math>S_1 = n(4 - n)</math> .....</p> <p>(3) <math>(u_n)</math> هندسية معناه <math>2a + 4 = 0</math> ومنه <math>a = -2</math> ، <math>u_{50} = 3(-1)^{50} = 3</math> ، <math>S_2 = \frac{3}{2} [1 - (-1)^{50}] = 0</math> .....</p> <p>(4) لما <math>n = 0</math> لدينا <math>u_0 = 3 = 3^0 + 2</math> ، نفرض <math>u_n = 3^n + 2</math> ونبرهن <math>u_{n+1} = 3^{n+1} + 2</math> .....</p> <p>فإن <math>u_{n+1} = 3(3^n + 2) - 4 = 3^{n+1} + 2</math> ومنه من أجل كل عدد طبيعي <math>n</math> : <math>u_n = 3^n + 2</math> ..</p> <p><math>u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (1 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n) + 2(n+1)</math></p> <p>.....</p> <p><math>= \frac{3^{n+1} - 1}{2} + 2n + 2 = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 4n + 3)</math></p>															
	0.5×3																
	0.5×3																
	1																
0.5	0.5																

العلامة		عناصر الإجابة
مجموع	مجزأة	
07		<b>التمرين الرابع: (07 نقط)</b>
	0.25×3	..... (1) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ، $x = 0$ معادلة مستقيم مقارب ....
	0.25×2	..... (ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
	0.5	..... (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = 0$ ومنه $(\Delta)$ مستقيم مقارب مائل لـ $(C_f)$ .....
	0.5	..... (ب) التحقق $f(x) = 2x - 2 + \frac{e^x}{e^x - 1}$
	0.5	..... $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x - 2)] = 0$ ومنه $(\Delta')$ مستقيم مقارب مائل لـ $(C_f)$ .....
	0.5+0.75	..... (3) $f'(x) = \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2} = \frac{(2e^x - 1)(e^x - 2)}{(e^x - 1)^2}$ وإشارته .....
	0.5	الدالة $f$ متزايدة على كل من المجالين $]-\infty; -\ln 2]$ و $[\ln 2; +\infty[$ ومتناقصة على كل
	0.25	من المجالين $]-\ln 2; 0[$ و $]0; \ln 2]$ .....
	1	جدول التغيرات .....
1	(4) الرسم .....	
0.25	(5)	$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left( 2x - 2 + \frac{e^x}{e^x - 1} \right) dx$ $= \left[ x^2 - 2x + \ln(e^x - 1) \right]_1^2 = 1 + \ln(e + 1)$ <p>هندسيا هو مساحة الحيز من المستوي المحدد بـ <math>(C_f)</math> والمستقيمات التي معادلاتها:  <math>y = 0</math> ، <math>x = 2</math> ، <math>x = 1</math></p>

العلامة		عناصر الإجابة																
مجموع	مجزأة																	
04		<b>التمرين الأول: (04 نقط)</b>																
	4×0.25	1) أ- $u_1 = 3$ ، $u_2 = \frac{9}{2}$ ، $u_3 = \frac{15}{4}$ ، $u_4 = \frac{33}{8}$ .....																
	0.5	ب- $(u_n)$ ليست رتيبة على $\mathbb{N}$ لأن مثلا الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ ليست مرتبة .....																
	0.5	2) أ) $u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)$ .....																
	3×0.25	ب) $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n$ ومنه $(v_n)$ هندسية أساسها $-\frac{1}{2}$ و $v_0 = 2$ .....																
	2×0.25	ج) $u_n = 4 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ، $v_n = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ .....																
	0.25	د) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ ومنه $(u_n)$ متقاربة .....																
2×0.25	3) $u_{n+1} - u_n = -3\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ، إشارته ليست ثابتة فالمتتالية غير رتيبة .....																	
05		<b>التمرين الثاني: (05 نقط)</b>																
	1	1) أ) الشجرة المتوازنة .....																
	0.75	ب) $p(s \cap A) = p(A) \cdot p_A(s) = 0,5 \times 0,6 = 0,3$ .....																
	0.75	ج) $p(s \cap B) = p(B) \cdot p_B(s) = 0,5 \times 0,7 = 0,35$ .....																
	0.75	د) $p(s) = p(s \cap A) + p(s \cap B) = 0,65$ .....																
	1	هـ) $p_{\bar{s}}(B) = \frac{p(B \cap \bar{s})}{p(\bar{s})} = \frac{0,5 \times 0,3}{1 - 0,65} = \frac{3}{7}$ .....																
0.75	2) $p_1 = 0,6$ ، $p_2 = 0,7$ ومنه $p = 0,6 \times 0,7 = 0,42$ (احتمال سحب سؤال في الاختصاص من A و $p_2$ احتمال سحب سؤال في الاختصاص من B والحادثتان مستقلتان)																	
04		<b>التمرين الثالث: (04 نقط)</b>																
	0.5	1) أ- تمثيل سحابة النقط .....																
	0.25	ب- لا يمكن تسويتها بتعديل خطي لأن السحابة ليس لها شكلا متطاولا .....																
	0.5	2) أ) <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td><math>x_i</math></td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td><math>z_i</math></td> <td>9.97</td> <td>10.39</td> <td>10.78</td> <td>11.23</td> <td>11.71</td> <td>12.24</td> <td>12.54</td> </tr> </table> .....	$x_i$	1	2	3	4	5	6	7	$z_i$	9.97	10.39	10.78	11.23	11.71	12.24	12.54
	$x_i$	1	2	3	4	5	6	7										
	$z_i$	9.97	10.39	10.78	11.23	11.71	12.24	12.54										
	0.5	ب) تمثيل السحابة $M'_i(x_i; z_i)$ .....																
2×0.25	ج) $G(4; 11.27)$ .....																	
0.75	د) المعادلة $z = 0,44x + 9,51$ .....																	
2×0.25	3) أ) $y = e^z$ ومنه $y = e^{9.55} \times e^{0.44x}$ . $k = 13494$ .....																	
2×0.25	ب) رتبة سنة 2014 هي $x = 9$ ومنه $y = 707859$ .....																	

العلامة		عناصر الإجابة
مجموع	مجزأة	
		<b>التمرين الرابع: (07 نقط)</b> (I) إشارة $g(x)$ : $\begin{array}{c ccc} x & 0 & 2 & +\infty \\ \hline g(x) & \  & + & 0 \end{array}$
	4×0.25	
	0.25	(2) أ) $g(x) = -1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$
	0.5	ب) $c \in \mathbb{R}$ ، $G(x) = -x - \frac{2}{x} + \ln x + c$
	0.5+0.25	(II) 1) أ) $f(1) = 0$ و $f'(x) = g(x)$
	0.5	ب) $f$ متزايدة تماما على $[0; 2]$ ومتناقصة تماما على $[2; 8]$
	2×0.25	ج) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ ومنه $x = 0$ معادلة مستقيم مقارب
	0.5	د) جدول التغيرات $f(8) = -\frac{21}{4} + 3\ln 2$
	0.25	2) لدينا $f(1) = 0$
07	0.25	تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة
	0.25	$f(3,9) = -0,05$ ، $f(3,8) = 0,008$
	0.5	3) تمثيل المنحنى $(C_f)$
	0.25	(III) 1) إذا كانت $-\frac{2}{3} < x \leq 0$ فإن $0 < 3x + 2 \leq 2$
	0.25	إذا كانت $0 < x \leq 2$ فإن $2 < 3x + 2 \leq 8$
	0.5	2) $h'(x) = 3f'(3x+2)$
	0.75	3) جدول تغيرات $h$ : $\begin{array}{c ccc} x & -\frac{2}{3} & 0 & 2 \\ \hline h'(x) & \  & + & 0 & - \\ \hline h(x) & \  & -\infty & \ln 2 & -\frac{21}{4} + 3\ln 2 \end{array}$