

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

### الموضوع الأول

**التمرين الأول: (04 نقاط)**

(1) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن:  $(2x+1)(x^2-5x+6) = 2x^3-9x^2+7x+6$

ب) حل في  $\mathbb{R}$  كلا من المعادلتين:  $2(\ln x)^3 - 9(\ln x)^2 + 7\ln x + 6 = 0$

$$6e^{-3x} + 7e^{-2x} - 9e^{-x} + 2 = 0$$

ج) حل في  $\mathbb{R}$  المترابحة:  $2e^{3x} - 9e^{2x} + 7e^x + 6 \leq 0$

(2) حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة:  $\log(x^2+100) = 1 + \log 2 + \log x$

**التمرين الثاني: (05 نقاط)**

أجب بصحيح أو خطأ، مع التبرير، في كل حالة من الحالات الآتية:

1/  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  حدودها موجبة تماما و  $(v_n)$  المتتالية المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $v_n = \ln u_n$

أ) إذا كانت  $(u_n)$  متقاربة فإن  $(v_n)$  متقاربة.

ب) إذا كانت  $(u_n)$  متناقصة فإن  $(v_n)$  متناقصة.

ج) إذا كانت  $(u_n)$  هندسية فإن  $(v_n)$  حسابية.

2/ الجدول الآتي يمثل سلسلة إحصائية:

$x_i$	1	2	3	4	5
$y_i$	8	9	12	12	13

أ) إحداثيات النقطة المتوسطة لسحابة النقط  $M_i(x_i; y_i)$  هي  $(3; 10,8)$

ب) معامل توجيه مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا لسحابة النقط هو 3,1

### التمرين الثالث: (04 نقاط)

ثلاثة أكياس متماثلة  $U_1$ ،  $U_2$  و  $U_3$  كل منها يحوي 6 كريات متماثلة، الكيس  $U_1$  يحوي كرتين بيضاوين وأربع كريات حمراء، الكيس  $U_2$  يحوي ثلاث كريات بيضاء وثلاث كريات حمراء والكيس  $U_3$  يحوي خمس كريات بيضاء وكريه حمراء. نختار عشوائيا كيسا ثم نسحب منه دون اختيار كرية واحدة.

- (1) شكل شجرة الاحتمالات المتوازنة التي تتمذج هذه الوضعية.
- (2) ما احتمال سحب كرية بيضاء من الكيس  $U_3$  ؟
- (3) ما احتمال سحب كرية بيضاء؟
- (4) علما أن الكرية المسحوبة بيضاء، ما احتمال أن تكون من الكيس  $U_3$  ؟

### التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) الدالة العددية  $g$  معرفة على  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$

- (1) ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$
  - (2) احسب  $g(1)$  ثم استنتج تبعا لقيم  $x$  إشارة  $g(x)$
- (II) الدالة العددية  $f$  معرفة على  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$
- ( $C_f$ ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- (1) أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ( يعطى  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  )  
ب) احسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  ثم فسّر النتيجة هندسيا.
- (2) أ) بيّن أنه من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$  فإن:  $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$  ثم استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة  $f$

- (3) أ) بيّن أن المستقيم ( $D$ ) الذي معادلته  $y = x - 1$  مقارب مائل للمنحنى ( $C_f$ )

ب) ادرس وضعية ( $C_f$ ) بالنسبة إلى ( $D$ )

- (4) عيّن فاصلة النقطة  $A$  من ( $C_f$ ) التي يكون فيها المماس ( $T$ ) موازيا للمستقيم ( $D$ ) ثم اكتب معادلة للمماس ( $T$ )

(5) ارسم ( $D$ )، ( $T$ ) و ( $C_f$ )

- (6) احسب القيمة المتوسطة للدالة  $f$  على المجال  $[1; 3]$

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: (04 نقاط)

عين مع التبرير الجواب الصحيح الوحيد من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة في كل حالة من الحالات الآتية:

	أطباء	ممرضون
ذكور	12	25
إناث	8	15

(I) أعضاء الطاقم الصحي لمؤسسة استشفائية موزعين حسب الجدول المقابل

اختير عشوائيا عضو من هذا الطاقم.

(1) احتمال أن يكون العضو المختار أنثى هو:

(أ)  $\frac{1}{23}$  (ب)  $\frac{23}{60}$  (ج)  $\frac{8}{23}$

(2) احتمال أن يكون العضو المختار أنثى علما أنها طبيبة هو:

(أ)  $\frac{2}{5}$  (ب)  $\frac{2}{15}$  (ج)  $\frac{8}{23}$

(II) الجدول المقابل يعرف قانون احتمال لتجربة عشوائية:

$x_i$	1	2	3	4
$p_i$	0,2	0,4	0,1	0,3

(1) تباين قانون الاحتمال هو:

(أ) 1,12 (ب) 2,5 (ج) 1,25

(2) إذا كانت  $A$  و  $B$  حادثتين مستقلتين حيث:  $p(A)=0,4$  ،  $p(B)=0,3$  فإن  $p(A \cap B)$  هو:

(أ) 0,12 (ب) 0,7 (ج) 0,75

### التمرين الثاني: (04.5 نقطة)

الجدول الآتي يمثل تغير سعر الكيلوغرام الواحد من مادة استهلاكية بين السنوات 2008 و 2012

السنة	2008	2009	2010	2011	2012
رتبة السنة $x_i$	1	2	3	4	5
سعر $y_i$ 1kg بالدولار	3,64	3,76	3,81	3,95	4,39

(1) احسب النسبة المئوية لتغير سعر الكيلوغرام الواحد من هذه المادة بين سنتي 2008 و 2012 .

(2) مثل سحابة النقط  $M_i(x_i; y_i)$  في معلم متعامد.

(3) جد إحداثي  $G$  النقطة المتوسطة لسحابة النقط السابقة.

(4) بين أن المعادلة المختصرة لمستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا هي:  $y = 0,17x + 3,40$  (النتائج مدورة إلى  $10^{-2}$ )

(5) بفرض أن تغير سعر الكيلوغرام الواحد من هذه المادة يبقى على نفس الوتيرة في السنوات القادمة.

(أ) قدر سعر الكيلوغرام الواحد من هذه المادة في سنة 2016.

(ب) في أية سنة سيصبح سعر الكيلوغرام الواحد من هذه المادة الاستهلاكية 5,61 دولار؟

### التمرين الثالث: (04.5 نقطة)

المتتالية العددية  $(u_n)$  معرفة كما يلي:  $u_0 = 3$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ ؛  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$

1- (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $u_n > -3$

(ب) بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما.

(ج) استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة.

2- لتكن  $(v_n)$  متتالية هندسية متقاربة أساسها  $q$  حيث:  $v_0 = 6$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = 18$

$$(أ) \text{ بين أن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$$

(ب) احسب الأساس  $q$  ثم عيّن عبارة الحد العام  $v_n$  بدلالة  $n$ .

(ج) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ؛  $u_n = v_n - 3$  واستنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$ .

### التمرين الرابع: (07 نقاط)

الدالة العددية  $f$  معرفة على  $[0; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = 6(1-2x)e^{-x} + 5$

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(I) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم فسّر النتيجة هندسيا. (يعطى  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ )

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) أنشئ  $(C_f)$

(4) (أ) بين أن المعادلة  $f(x) = 3,5$  تقبل في  $[0; 7]$  حلين مختلفين  $\alpha, \beta$  حيث:  $0,7 < \alpha < 0,8$  و  $2,9 < \beta < 3$

(ب) حل بيانيا في المجال  $[0; 7]$  المتراحة:  $f(x) \leq 3,5$

(5) (أ) عيّن العددين الحقيقيين  $a, b$  بحيث تكون الدالة  $g$  المعرفة على  $[0; 7]$  بـ:  $g(x) = (ax + b)e^{-x}$

دالة أصلية للدالة  $h$  المعرفة على  $[0; 7]$  بـ:  $h(x) = 6(1-2x)e^{-x}$

(ب) استنتج دالة أصلية للدالة  $f$  على  $[0; 7]$

(II) الكلفة الهامشية  $C_M$  لصناعة كمية  $x$  (مقدرة بالطن) من منتج، حيث  $x$  ينتمي إلى المجال  $[0; 7]$

تتمذج بالدالة  $f$  أي:  $C_M(x) = f(x)$  (الكلفة مقدرة بملايين الدنانير).

(1) حدّد كمية المنتج بحيث تكون الكلفة الهامشية أقل ما يمكن، وما هي قيمة هذه الكلفة؟ (تدور النتيجة إلى  $10^{-2}$ )

(2) ما هي كميات المنتج التي من أجلها لا تتجاوز الكلفة الهامشية 3,5 مليون دينار؟

(3) نذكر أن دالة الكلفة الإجمالية دالة أصلية لدالة الكلفة الهامشية.

(أ) بين أن الكلفة الإجمالية  $C_T$  معرفة بـ:  $C_T(x) = (12x + 6)e^{-x} + 5x + k$  حيث  $k$  عدد حقيقي.

(ب) حدّد قيمة  $k$  إذا علمت أن المصاريف الثابتة 2 مليون دينار (أي  $C_T(0) = 2$ ).

# الإجابة النموذجية و سلم التثقيط

امتحان شهادة البكالوريا دورة : 2014

المادة : رياضيات الشعبة: تسيير واقتصاد

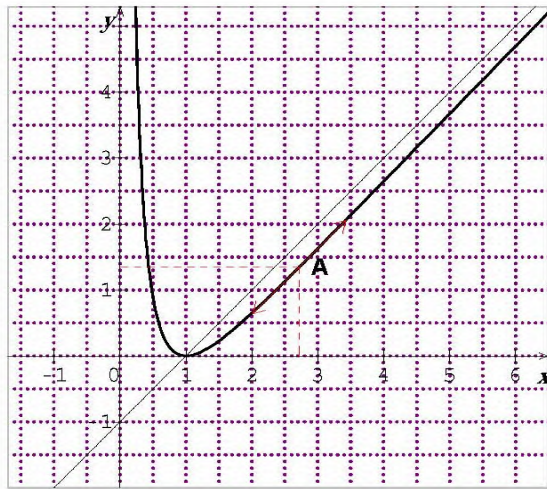
العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)
مجموع	مجزأة	
04	0.5	<b>التمرين الأول: (04 نقاط)</b> (1) أ) التحقق من أن : $(2x+1)(x^2-5x+6) = 2x^3-9x^2+7x+6$ . ب) حلول المعادلة : $2(\ln x)^3 - 9(\ln x)^2 + 7\ln x + 6 = 0$
	0.25	أي أن : $(2\ln x + 1)((\ln x)^2 - 5\ln x + 6) = 0$
	0.75	ومنه : $(2\ln x + 1)(\ln x - 2)(\ln x - 3) = 0$ ومنه : $(x = \frac{1}{\sqrt{e}})$ أو $(x = e^2)$ أو $(x = e^3)$
	0.5	حلول المعادلة : $6e^{-3x} + 7e^{-2x} - 9e^{-x} + 2 = 0$
	0.5	أي أن : $(2e^x + 1)(e^x - 2)(e^x - 3) = 0$ ومنه : $(x = \ln 2)$ أو $(x = \ln 3)$
	0.5	ج) حل المتراجحة : $2e^{3x} - 9e^{2x} + 7e^x + 6 \leq 0$ أي أن : $(2e^x + 1)(e^x - 2)(e^x - 3) \leq 0$ و منه : $x \in [\ln 2; \ln 3]$
	0.25	2) حل المعادلة : $\log(x^2 + 100) = 1 + \log 2 + \log x$ المعادلة معرفة في المجال $]0; +\infty[$
	0.5	المعادلة تكافئ : $\log(x^2 + 100) = \log(10 \times 2 \times x)$
	0.25	و منه : $x^2 - 20x + 100 = 0$ و منه : $x = 10$
	05	0.75+0.25
0.75+0.25		ب) صحيح لأن : $u_{n+1} < u_n$ تكافئ $\ln u_{n+1} < \ln u_n$ أي $v_{n+1} < v_n$
0.75+0.25		ج) صحيح لأن : من $u_{n+1} = qu_n$ نجد $\ln u_{n+1} = \ln q + \ln u_n$ أي $v_{n+1} = v_n + \ln q$
0.75+0.25		2) أ / صحيح لأن : $\bar{x} = 3$ ، $\bar{y} = 10,8$ ب / خطأ لأن : $a = 1,3$
0.75+0.25		
04	1	<b>التمرين الثالث: (04 نقاط)</b> (1) تشكيل الشجرة .
	1	(2) احتمال سحب كرية بيضاء من $U_3$ هو $\frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$
	1	(3) احتمال سحب كرية بيضاء هو $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{9}$
	1	(4) احتمال اختيار $U_3$ علما أن الكرية بيضاء هو $P_B(U_3) = \frac{P(U_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2}$
	1	

العلامة		عناصر الإجابة
مجموع	مجزأة	
07	0.75	التمرين الرابع: (07 نقاط) 1 (I) $g'(x) = -2x - \frac{1}{x}$ ، $g'(x) < 0$ و منه $g$ متناقصة تماما على $]0; +\infty[$ .
	0.25	2 (أ) $g(1) = 0$
	0.25	إشارة $g(x)$
	0.25	2 (II) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (أ)
	0.25 × 2	ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ، معادلة مستقيم مقارب $x = 0$
	0.5	2 (أ) إثبات $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$
	0.5	$f$ متناقصة تماما على $]0; 1[$ و متزايدة تماما على $]1; +\infty[$
	0.25	ب) جدول التغيرات
	0.25	3 (أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x-1)) = 0$ مقارب مائل لأن:
	0.25	ب) $f(x) - (x-1) = -\frac{\ln x}{x}$
2 × 0.25	في $]0; 1[$ $(C_f)$ أعلى $(D)$ و في $]1; +\infty[$ $(C_f)$ أسفل $(D)$	
0.5 × 2	4 (D) // (T) معناه $f'(x) = 1$ و منه $x = e$ ؛ $y = x - 1 - \frac{1}{e}$	
1	5 الرسم	
0.75	6) القيمة المتوسطة: $\mu = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx = 1 - \frac{1}{4} (\ln 3)^2$	

$x$	0	1	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	↘ 0 ↗	$+\infty$

$x$	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-



العلامة		عناصر الإجابة
مجموع	مجزأة	
04	0.75+0.25	<p>الموضوع الثاني</p> <p>التمرين الأول: (04 نقاط )</p> <p>(1 أ) ب) <math>\frac{23}{60}</math> لأن: <math>p(F) = \frac{23}{60}</math></p> <p>(2 أ) <math>\frac{2}{5}</math> لأن: <math>p_M(F) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}</math></p> <p>(1 ب) <math>E = 2,5</math> لأن: <math>1,25</math></p> <p>و <math>V = 0,2^2 + 2 \times 0,4^2 + 3 \times 0,1^2 + 4 \times 0,3^2 - 2,5^2 = 1,25</math></p> <p>(2 أ) <math>1,12</math> لأن <math>p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0,12</math></p>
	0.75+0.25	
	0.75+0.25	
	0.75+0.25	
04.5	0.5	<p>التمرين الثاني (04.5 نقطة )</p> <p>(1) النسبة المئوية هي: <math>\frac{4,39 - 3,64}{3,64} \times 100 = 20,6\%</math></p> <p>(2) تمثيل سحابة النقط</p> <p>(3) <math>G(3; 3,91)</math></p> <p>(4) لدينا: <math>a = 0,17</math> ، <math>b = \bar{y} - a\bar{x}</math> ومنه <math>y = 0,17x + 3,4</math></p> <p>(5 أ) <math>y = 0,17 \times 9 + 3,4 = 4,93</math></p> <p>ب) من أجل <math>y = 5,61</math> نجد <math>x = 13</math> وهي رتبة سنة 2020</p>
	1.25	
	0.5	
	1.25	
	0.5	
	0.5	
04.5	0.25	<p>التمرين الثالث: (04.5 نقطة)</p> <p>(1 أ) لدينا <math>u_0 = 3</math> ومنه <math>u_0 &gt; -3</math></p> <p>نفرض <math>u_n &gt; -3</math> ومنه <math>u_{n+1} &gt; -3</math> أي <math>\frac{2}{3}u_n - 1 &gt; -3</math></p> <p>إذن من أجل كل عدد طبيعي <math>n</math> ؛ <math>u_n &gt; -3</math></p> <p>ب) <math>(u_n)</math> متناقصة تماما لأن: <math>u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}(u_n + 3) &lt; 0</math></p> <p>ج) <math>(u_n)</math> متقاربة لأنها متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل.</p> <p>(2 أ) <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0</math> ، <math>(v_n)</math> متقاربة لأن: <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = \frac{v_0}{1-q} = 18</math></p> <p>ب) إذن: <math>q = \frac{18-6}{18} = \frac{2}{3}</math> ، <math>v_n = 6\left(\frac{2}{3}\right)^n</math></p> <p>ج) لدينا <math>u_{n+1} + 3 = \frac{2}{3}(u_n + 3)</math> ، <math>u_0 + 3 = v_0 = 6</math> ومنه <math>(u_n + 3)</math> متتالية هندسية</p> <p>أساسها <math>\frac{2}{3}</math> وحدها الأول <math>u_0 + 3 = 6</math> ومنه <math>u_n = v_n - 3</math> وعليه <math>u_n = 6\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3</math></p> <p>يمكن استعمال البرهان بالتراجع</p>
	0.5	
	0.25	
	0.5	
	0.5	
	0.5	
	1	
	0.5	

العلامة		عناصر الإجابة												
مجموع	مجزأة													
07	0.25×2	التمرين الرابع: (07 نقاط)												
	1	(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$ ، $y = 5$ معادلة مستقيم مقارب												
	0.25	(2) $f'(x) = 6(2x - 3)e^{-x}$ ، إشارته $f$ متناقصة تماما على $[0; 1,5]$ ومتزايدة تماما على $[1,5; +\infty[$												
	0.75	جدول التغيرات												
		<table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td>0</td> <td>1,5</td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>f'(x)</math></td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td><math>f(x)</math></td> <td>11</td> <td><math>f(1,5)</math></td> <td>5</td> </tr> </table>	$x$	0	1,5	$+\infty$	$f'(x)$	-	0	+	$f(x)$	11	$f(1,5)$	5
	$x$	0	1,5	$+\infty$										
	$f'(x)$	-	0	+										
	$f(x)$	11	$f(1,5)$	5										
		(3) رسم $(C_f)$												
0.5	(4) أ) الدالة $f$ مستمرة ومتناقصة تماما على $[0; 1,5]$ و $f(1,5) < 3,5 < f(0)$ ومنه $f(x) = 3,5$ تقبل في $]0; 1,5[$ حلا وحيدا $\alpha$													
0.5	الدالة $f$ مستمرة ومتزايدة تماما على $[1,5; +\infty[$ و $f(1,5) < 3,5 < 5$ ومنه $f(x) = 3,5$ تقبل في $[1,5; +\infty[$ حلا وحيدا $\beta$													
0.5	$f(0,7) = 3,8$ و $f(0,8) = 3,39$ ومنه $0,7 < \alpha < 0,8$													
0.5	$f(2,9) = 3,42$ و $f(3) = 3,5$ ومنه $2,9 < \beta < 3$													
0.75	ب) $f(x) \leq 3,5$ تكافئ $\alpha \leq x \leq \beta$													
0.5	(5) أ) من $g'(x) = h(x)$ نجد $a = 12$ ، $b = 6$													
0.5	ب) $F(x) = (12x + 6)e^{-x} + 5x$													
0.5	(II) 1) كمية المنتج 1,5 طن وتكلفتها هي 2,32 مليون دينار													
0.25	2) كميات المنتج التي من أجلها $C_M \leq 3,5$ هي $x$ حيث: $\alpha \leq x \leq \beta$													
0.25	(3) أ) $C_T'(x) = f(x)$ ومنه $C_T(x) = (12x + 6)e^{-x} + 5x + k$													
0.25	ب) من $C_T(0) = 2$ نجد $k = -4$													