المادّة: الرياضيات
المستوى: 3 ت إ

التّاريخ: 2021/11/29
المدّة: 02 ســا و30د

اختبار الفصل الأوّل

تمرين 1:

(u_n) متتالية عددية معرّفة بحدّها الأوّل $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$

I. عيّن قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

II. في كل ما يلي: $\alpha = 3$

1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3 .

2) أ- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}$ فإنّ: $u_n > 1$

ب- جدّ اتجاه تغير المتتالية (u_n). ماذا تستنتج؟

3) لتكن (v_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 1$

أ) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول v_0 و أساسها q.

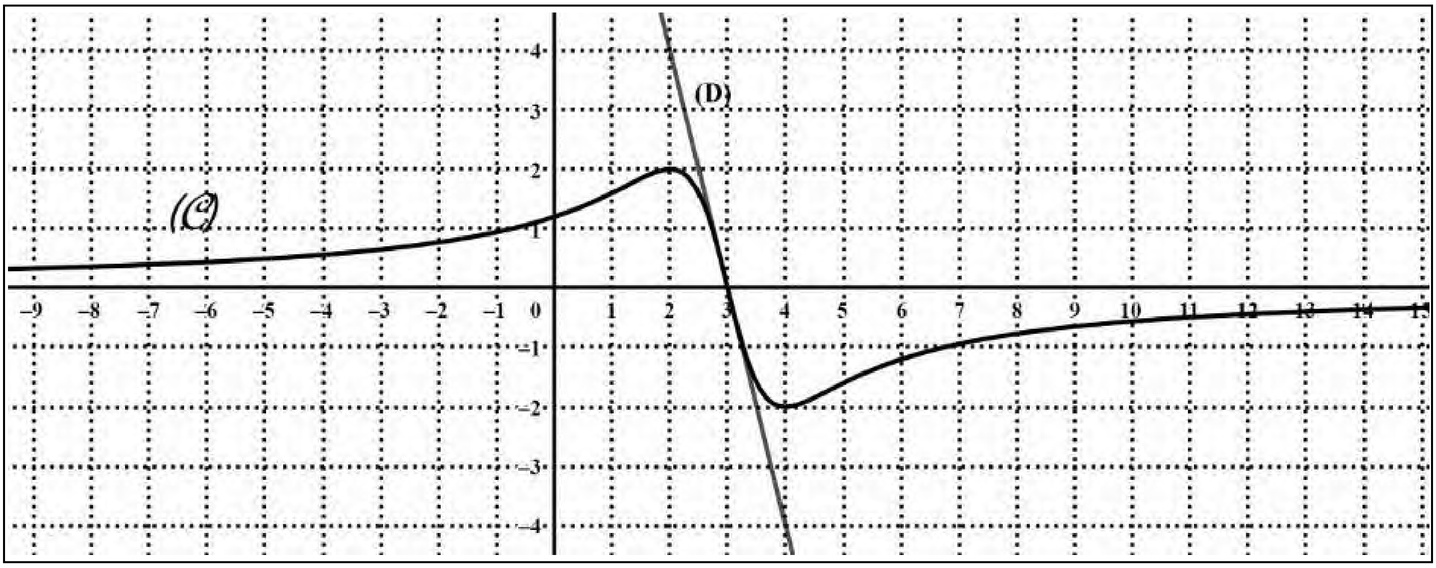
ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$.

ج) ماهي نهاية المتتالية (u_n)؟

4) أحسب بدلالة n المجموعين S_n و S'_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

تمرين 2:

في الشكل المرفق التمثيل البياني $(\mathcal{C})$ للدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$، (Δ) مماس لـ $(\mathcal{C})$ عند النّقطة $A(3;0)$



1) عيّن: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)}$ ، $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)}$

2) عيّن معادلة المستقيم المقارب الأفقي.

3) أدرس وضعية (C) بالنسبة لمحور الفواصل ثم استنتج اشارة f.

4) عيّن $f'(2)$ وشكل جدول تغيرات الدّالة f.

5) عيّن $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ ثم أكتب معادلة (Δ).

6) ناقش بيانيًا حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة: $f(x)=m$

تمرين 3:

نعتبر الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^2+5x+10}{x+2}$

ليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

ب- أحسب $\lim_{\substack{x\to-2\\ >}}f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to-2\\ <}}f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيًا.

2) أ- عيّن الأعداد الحقيقة a ، b ، c حيث من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2\}$: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$

ب- بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C).

جـ- أدرس وضعية المنحني (C) بالنسبة للمستقيم (Δ).

3) أ- بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2\}$ فإنّ: $f'(x)=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$

ب- أدرس اتجاه تغير الدّالة f على مجالي مجموعة تعريفها ،ثم شكّل جدول تغيراتها.

4) أكتب معادلة المماس (T)لمنحني (C) عند النّقطة ذات الفاصلة 2.

5) بيّن أنّ النقطة $\Omega(-2;1)$ هي مركز تناظر للمنحني (C).

6) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحني (C).

7) نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=\frac{x^2+5|x|+10}{|x|+2}$ و (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ- بيّن أنّ g دالة زوجية.

ب- اشرح كيفية انشاء المنحني (C_g) اعتمادا على المنحني (C) ثم أنشئه.

بالتّوفيق — الأستاذ: بوشاشية وليد

تصحيح امتحان الفصل I

ت3 :

ت1 :

1) قيمة α :

$\frac{1}{5}\alpha + \frac{4}{5} = \alpha$

$\alpha + 4 = 5\alpha$

$4\alpha = 4$ ومنه $\alpha = 1$

2) حساب الحدود :

$U_1 = \frac{1}{2}(3) + \frac{4}{5} = \frac{3}{2} + \frac{4}{5} = \frac{15+8}{10} = \frac{23}{10}$

$U_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{23}{10}\right) + \frac{4}{5} = \frac{23}{20} + \frac{16}{20} = \frac{39}{20}$

3) البرهان بالتراجع : $U_n > 1$

• التحقق من صحة $P(0)$

$U_0 > 1 \to 3 > 1$ محققة

• نفرض صحة $P(n)$ ونبين صحة $P(n+1)$

لدينا $U_n > 1$

$\frac{1}{5}U_n > \frac{1}{5}$

$\frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5} > 1$

ومنه $U_{n+1} > 1$

اذن $P(n)$ محققة من أجل كل n طبيعي

• اتجاه تغير (U_n) :

$U_{n+1} - U_n = \frac{\alpha+4}{5} - \frac{5U_n}{5}$

$= \frac{-4U_n+4}{5}$

لدينا $U_n > 1$

$-4U_n < -4$

$-4U_n + 4 < 0$

وبالتالي (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

لدينا (U_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل اذن هي متقاربة.

$V_n = U_n - 1$

أ) لدينا :

$V_{n+1} = U_{n+1} - 1$

$= \frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5} - \frac{5}{5}$

$= \frac{1}{5}U_n - \frac{1}{5}$

$= \frac{1}{5}(U_n - 1)$

$V_{n+1} = \frac{1}{5}V_n$

ومنه (V_n) هندسية

$V_0 = U_0 - 1 = 2$

كتابة الحد العام :

$V_n = V_p \cdot q^{n-p}$

$V_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$

استنتاج كتابة U_n :

$U_n = V_n + 1$

$U_n = 2\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$

نهاية (U_n) :

$\lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1 = 1$

لأن : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

المجموع :

$S_n = V_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$

$= 2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\frac{4}{5}}\right)$

$= \frac{5}{2}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$

$S'_n = S_n + n + 1$

$= \frac{5}{2}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right) + n + 1$

ت2 :

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^-$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

$y=0$ م.م أفقي بجوار $\pm\infty$.

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

$x \in]-\infty, 3[$ (C_f) فوق محور الفواصل

$x = 3$ (C_f) يقطع محور الفواصل

$x \in]3, +\infty[$ (C_f) تحت محور الفواصل

$-\infty$		3		$+\infty$
	+	0	−	

$f'(2) = 0$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	2	↘	−2	↗	0

$\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3) = -2$

معادلة (D) :

$y = f'(3)(x-3) + f(3)$

$y = -2x + 6$

المناقشة البيانية :

$m < -2$ لا توجد حلول.

$m = -2$ حل وحيد مضاعف

$-2 < m < 0$ حلان

$m = 0$ حل وحيد.

$0 < m < 2$ حلان

$m = 2$ حل وحيد مضاعف

$m > 2$ لا توجد حلول.

ت 03:

$$f(x)=\frac{x^2+5x+10}{x+2}$$

1) النهايات:

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

$-\quad 0 \quad +$ (عند -2)

$\lim_{x\to-2^-}f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to-2^+}f(x)=+\infty$ $\quad x=-2$ م.م عمودي

2) الأعداد a ، b ، c:

$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$

$f(x)=\frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2}$

بالمطابقة:

$a=1$; $2b+c=10$

$2a+b=5$; $c=4$

$2+b=5$

$b=3$

3) المستقيم المقارب المائل:

$\lim_{|x|\to+\infty}f(x)-y$

$\lim_{|x|\to+\infty}x+3+\frac{4}{x+2}-(x+3)$

$\lim_{|x|\to+\infty}\frac{4}{x+2}=0$

4) الوضعية:

$f(x)-y$

$]-\infty,-2[$ (C_f) تحت (Δ)

$]-2,+\infty[$ (C_f) فوق (Δ)

و f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-2\}$

$$f'(x)=\frac{(2x+5)(x+2)-1(x^2+5x+10)}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{2x^2+4x+5x+10-x^2-5x-10}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$$

لدينا: $(x+2)^2>0$ اذن اشارة f' من اشارة البسط

$x^2+4x=0 \Rightarrow x=0$, $x=-4$

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	

$]-\infty,-4]$ f متزايدة تماما ; $]-2,0]$ f متناقصة تماما

$[-4,-2[$ f متناقصة تماما ; $[0,+\infty[$ f متزايدة تماما

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

معادلة المماس:

$y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}+\frac{12}{2}$

$$\boxed{y=\frac{3}{4}x+\frac{9}{2}}$$

مركز تناظر: $\Omega(-2,1)$

$-4-x\in\mathbb{R}-\{-2\}$

$f(-4-x)+f(x)=2$

$=-4-x+3+\frac{4}{-4-x+2}+x+3+\frac{4}{x+2}$

$=2+\frac{4}{-x-2}+\frac{4}{x+2}=2$

7) g زوجية:

$D_g=\mathbb{R}$ متناظر بالنسبة لـ 0.

$g(-x)=\frac{(-x)^2+5|-x|+10}{|-x|+2}=\frac{x^2+5|x|+10}{x+2}=g(x)$

شرح كيفية انشاء (C_g):

(C_f) منطبق على (C_g)

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & x\geq 0\\ f(-x) & x\leq 0\end{cases}$$

نناظر الجزء الموجب بالنسبة لمحور التراتيب لأن (g زوجية).