الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

دورة: **2020**

الشعبة: تسيير واقتصاد

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: **03** سا و **30** د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

إليك جدول تغيّرات دالة f معرّفة وقابلة للاشتقاق على كلّ من المجالين $]-\infty;2[$ و $]2;+\infty[$.

(C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أجب بـ: صحيح أو خاطئ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow 1$

1) المستقيم ذو المعادلة $y=2$ مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$.

2) النّقطة $A(3;2)$ تنتمي إلى المنحنى (C_f).

3) $f(2020) > f(2019)$.

4) المستقيم ذو المعادلة $y=1$ يقطع (C_f) في نقطة واحدة.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يتقاضى موظف خلال 2019 راتبا شهريا ثابتا يقدر بـ $70\,000$ DA ، في شهر جانفي استهلك منه 80% و ابتداءً من شهر فيفري قرّر تخفيض مبلغ الاستهلاك شهريا بنسبة 5% من المبلغ المستهلك في الشهر الذي قبله.

1) أ. ما هو المبلغ المستهلك في شهر جانفي ؟

ب. حدّد المبلغ المستهلك في شهر فيفري.

2) نضع: u_1 المبلغ المستهلك في شهر جانفي و u_n المبلغ المستهلك في الشهر n، حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

عبّر عن u_{n+1} بدلالة u_n و استنتج أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها 0.95.

3) اكتب عبارة الحدّ العام u_n بدلالة n.

4) أ. احسب المبلغ المستهلك خلال سنة 2019 .

ب. أوجد المبلغ المدخر خلال هذه السنة.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بحدّها الأول u_0 حيث: $u_0=1$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{3}{2}$

1) أ . برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n<\frac{9}{2}$

ب. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و استنتج أنّها متقاربة .

2) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n: $v_n=u_n-\frac{9}{2}$

أ . بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ يُطلب حساب حدّها الأول v_0 .

ب. عبّر عن v_n بدلالة n ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$.

احسب S_n بدلالة n .

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) الدالة العددية g معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـِ: $g(x)=x^2-1+\ln x$.

1) احسب كلا من $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g على المجال $]0;+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) احسب $g(1)$ ثمّ استنتج حسب قيم x اشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x+2+x\ln x$.

(C_f) التّمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. (يُعطى : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}x\ln x=0$)

2) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x موجب تماما : $f'(x)=g(x)$.

3) استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4) احسب $f(2)$ ثمّ انشئ (C_f).

5) الدّالة F معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $F(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{5}{4}x^2+2x-8+\frac{1}{2}x^2\ln x$

بيّن أنّ F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x)=\frac{1}{3}x^2-2x$.

(C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

عيّن الاقتراح الصّحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثّلاثة التّالية مع التبرير.

1) الدّالة الأصلية لـ f على $\mathbb{R}$ التي تنعدم من أجل $x=1$ هي الدّالة F حيث:

أ) $F(x)=x^3-x^2$ ب) $F(x)=\frac{1}{9}x^3-x^2$ جـ) $F(x)=\frac{1}{9}x^3-x^2+\frac{8}{9}$

2) القيمة المتوسطة للدّالة f على المجال $[0;1]$ هي:

أ) $\frac{1}{9}$ ب) $\frac{-8}{9}$ جـ) $\frac{8}{9}$

3) الدّالة f متزايدة تماما على المجال:

أ) $[3;+\infty[$ ب) $[-3;+\infty[$ جـ) $]-\infty;3]$

4) المستقيم ذو المعادلة $y=\frac{-5}{3}$ يقطع المنحنى (C_f) في نقطتين فاصلتاهما:

أ) 1 و 5 ب) 1 و -5 جـ) -1 و -5

التمرين الثاني: (04 نقاط)

المتتالية الهندسية (v_n) حدّها الأول v_0 وأساسها q موجبان تماما و: $\begin{cases} \ln v_5+\ln v_3 = 8\ln 2 \\ \ln v_5-\ln v_3 = 2\ln 2 \end{cases}$

1) بيّن أنّ: $v_5=32$ و $v_3=8$

2) أ . بيّن أنّ: $q=2$ و $v_0=1$

ب. اكتب v_n بدلالة n .

جـ. هل العدد 1024 حدّ من حدود المتتالية (v_n)؟

3) المتتالية (w_n) معرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ: $w_n=2n-3+2^n$

أ . تحقّق أنّ : $w_n=u_n+v_n$ ، حيث (u_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول u_0.

ب. من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n=w_0+w_1+\cdots+w_n$

بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=(n+1)(n-3)+2^{n+1}-1$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بحدّها الأول u_0 حيث: $u_0=5$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{5}{7}u_n+\frac{6}{7}$

1) برهن بالتّراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n>3$

2) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واستنتج أنّها متقاربة.

3) المتتالية العددية (v_n) معرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - 3$

أ . بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب. اكتب عبارة v_n بدلالة n .

جـ. استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 2\times(\frac{5}{7})^n + 3$ واحسب نهاية (u_n).

4) عيّن أصغر قيمة للعدد الطبيعي n التي يكون من أجلها: $u_n < \frac{7}{2}$.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) الجدول المقابل هو جدول تغيرات الدّالة g المعرّفة

على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = 3x^3 - 2 + 4\ln x$

1) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,9<\alpha<1$

2) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $]0;+\infty[$.

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = 3x - 2 - \frac{2\ln x}{x^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.(تُؤخذ وحدة الطول $2cm$)

1) احسب كلا من $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (يُعطى : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$)

2) أ . بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 3x-2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب. ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

3) أ . بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

ب. استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

4) ارسم كلا من (Δ) و (C_f). (تؤخذ $f(\alpha)\approx 0,9$)

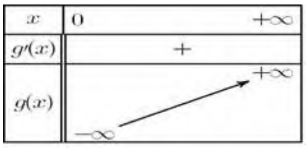
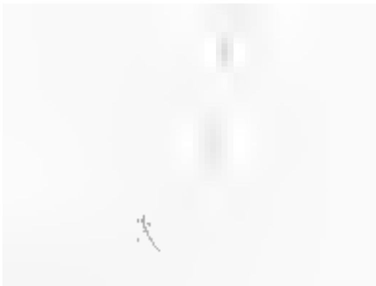
5) الدّالة H معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $H(x) = \frac{1+\ln x}{x}$

أ . بيّن أنّ H دالة أصلية للدالة: $x \mapsto -\frac{\ln x}{x^2}$ على المجال $]0;+\infty[$.

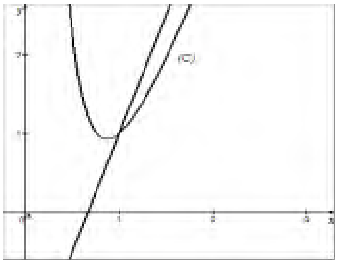
ب. احسب بـ cm^2 مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=1$ و $x=2$.

انتهى الموضوع الثاني

عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)	العلامة مجزأة	العلامة مجموعة
التّمرين الأوّل: (04 نقاط)		
1) خاطئة، لأنّ $\lim_{x\to -\infty} f(x) \neq 2$	2×0.5	1
2) خاطئة، لأنّ $f(3)<1$	2×0.5	1
3) صحيحة، لأنّ f متزايدة تماما على $]2;+\infty[$.	2×0.5	1
4) صحيحة، لأنّ $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا في $]-\infty;2[$ ولا تقبل حلا في $]2;+\infty[$	2×0.5	1
التّمرين الثّاني: (04 نقاط)		
1) أ. المبلغ المستهلك في شهر جانفي هو $56000DA$	0.5	1
ب. المبلغ المستهلك في شهر فيفري هو $53200DA$	0.5	
2) نجد: $u_1=56000$ و $u_{n+1}=\frac{19}{20}u_n$ الاستنتاج: (u_n) متتالية هندسية أساسها 0.95	0.5 0.5	1
3) $u_n=u_1\times q^{n-1}$ أي $u_n=56000\left(\frac{19}{20}\right)^{n-1}$	0.25 0.75	1
4) أ. حساب المبلغ المستهلك خلال سنة 2019 $u_1+u_2+u_3+....u_{12}=56000\dfrac{1-\left(\frac{19}{20}\right)^{12}}{1-\left(\frac{19}{20}\right)}=514796.7018\ DA$	0.5	1
ب. المبلغ المدّخر خلال هذه السنة $12\times 70000-514796.7018=325203.2982DA$	0.5	
التّمرين الثّالث: (04 نقاط)		
1) أ. إثبات بالتّراجع أنّه من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n<\frac{9}{2}$	0.75	1.5
ب. $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{3}\left(u_n-\frac{9}{2}\right)$ ومنه $u_{n+1}-u_n\geq 0$ استنتاج أن (u_n) متقاربة	0.5 0.25	
2) أ. نجد: $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ و $v_0=-\frac{7}{2}$	0.5 0.25	1.75
ب. $v_n=-\frac{7}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$ لدينا: $u_n=-\frac{7}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{9}{2}$ و $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{9}{2}$	0.25 0.25 0. 5	
3) $S_n=\frac{21}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1\right)+\frac{9}{2}(n+1)$	0.75	0.75

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)
مجموعة	مجزأة	
		التّمرين الرابع: (08 نقاط)
1	2×0.5	I) 1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
1	0.25 0.25 0.5	2) من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x) = \frac{2x^2+1}{x}$ الدّالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ جدول التغيرات 
1	0.25 0.75	3) لدينا: $g(1) = 0$ و بما أن g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فإن: g سالبة تماما على المجال $]0;1[$ وموجبة تماما على المجال $]1;+\infty[$
1	2×0.5	II) 1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 2$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
1	1	2) $f'(x) = x^2 - 1 + \ln(x) = g(x)$
1	0.5 0.5	3) الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;+\infty[$ جدول تغيّرات.
1	0.25 0.75	4) $f(2) = \frac{2}{3} + 2\ln 2$ إنشاء (C_f) 
1	1	5) من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $F'(x) = f(x)$

عناصر الإجابة (الموضوع الثّاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموعة
التّمرين الأوّل: (04 نقاط):		
1) الاقتراح الصحيح: ج)، لأنّ $F'(x)=f(x)$ و $F(1)=0$	2×0.5	1
2) الاقتراح الصحيح: ب)، لأنّ $\frac{F(1)-F(0)}{1-0}=-\frac{8}{9}$	2×0.5	1
3) الاقتراح الصحيح: أ)، لأنّ $f'(x)\geq 0$ على المجال $[3;+\infty[$	2×0.5	1
4) الاقتراح الصحيح: أ)، لأن $f(x)=\frac{-5}{3}$ تكافئ $x=1$ أو $x=5$	2×0.5	1
التّمرين الثّاني: (04 نقاط)		
1) بيان أنّ: $v_5=32$ و $v_3=8$	2× 0.5	1
2) أ . بيان أنّ: $q=2$ و $v_0=1$	0.75 0.25	02
ب. $v_n=2^n$	0.5	
جـ. $v_n=1024$ يكافئ $2^n=2^{10}$ وبالتالي $n=10$	0.5	
3) أ . $w_n=u_n+v_n$ حيث: $u_n=2n-3$ و (u_n) حسابية أساسها 2 و $u_0=-3$	0.5	1
ب. بيان أنّ: $S_n=(n+1)(n-3)+2^{n+1}-1$	0.5	
التّمرين الثّالث: (04 نقاط)		
1) البرهان بالتّراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n>3$	0.25 0.75	1
2) (u_n) متناقصة تماما (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة	0.75 0.25	1
3) أ . $v_{n+1}=\frac{5}{7}v_n$ ومنه (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{7}$ و $v_0=2$	0.75 0.25	1.75
ب. $v_n=2\left(\frac{5}{7}\right)^n$	0.25	
جـ. استنتاج أنّ: $u_n=2\times\left(\frac{5}{7}\right)^n+3$ و $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=3$	2x0.25	
4) $u_n<\frac{7}{2}$ تكافئ $n>\frac{\ln\frac{1}{4}}{\ln\frac{5}{7}}$ ومنه أصغر قيمة لـ n هي 5	0.25	0.25

عناصر الإجابة (الموضوع الثّاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموعة
التّمرين الرابع: (08 نقاط)		
I) 1) g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ وتأخذ قيمها في $]-\infty;+\infty[$ ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;+\infty[$ وبما أنّ: $g(0.9)\times g(1)<0$ فإن: $0.9<\alpha<1$	0.75 0.25	1
2) على المجال $]\alpha;+\infty[$: $g(x)>0$ وعلى $]0;\alpha[$: $g(x)<0$ و $g(\alpha)=0$	0.5	0.5
II)1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	2×0.5	1
2) أ . $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(3x-2)\right)=0$ ومنه $(\Delta): y=3x-2$ مقارب مائل لـ (C_f).	0.25	1
ب. وضعية (C_f) بالنسبة (Δ): x: 0 ، 1 ، $+\infty$ / $f(x)-(3x-2)$: + ، 0 ، - (C_f) فوق (Δ) على $]0;1[$ (C_f) تحت (Δ) على $]1;+\infty[$. (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$.	0.25 0.5	
3) أ . بيان أنّ: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$	0.5	1.5
ب. f متزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]0;\alpha]$ جدول التغيرات	0.5 0.5	
4) انشاء (Δ) و (C_f). 	0.25 0.75	1
5) أ . من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $H'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$	1	2
ب. حساب المساحة: $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx=2(3+2\ln 2)cm^2$	1	

حل الموضوع الأول

حل التمرين الأول (04 نقاط) من محور الدوال العددية

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير .

1/ خطأ ، التبرير : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2/ خطأ ، التبرير من أجل كل x من المجال $]2;+\infty[$ لدينا $f(x) \leq 1$

3/ صحيح ، التبرير : الدالة f متزايدة تماما على المجال $]2;+\infty[$ و $2020 > 2019$.

4/ صحيح ، التبرير : من أجل كل x من المجال $]-\infty,2[$ لدينا f مستمرة و متناقصة تماما و $1 \in]-\infty,2[$ ، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا أي المستقيم الذي معادلته : $y = 1$ يقطع (C_f) مرة واحدة و على المجال $]2,+\infty[$ المعادلة $f(x) = 1$ لا تقبل حلول لأنّ : f متزايدة تماما و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

حل التمرين الثاني (04 نقاط) من محور المتتاليات العددية

1/ أ) المبلغ المستهلك في شهر جانفي هو $70000 \times \frac{80}{100}$ أي $56000DA$.

ب) المبلغ المستهلك في شهر فيفري هو تخفيض 5% لـ 56000 أي هو $56000 \times \left(1 - \frac{5}{100}\right)$ أي 56000×0.95 أي هو $53200\textbf{DA}$.

2/ u_n هو المبلغ المستهلك في الشهر n و u_{n+1} هو المبلغ المستهلك في الشهر الموالي لـ n أي الشهر $n+1$ و منه $u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{5}{100}\right)$ أي $u_{n+1} = u_n \times 0.95$ و منه (u_n) هندسية أساسها $q = 0.95$.

3/ $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ أي $u_n = 56000 \times (0.95)^{n-1}$.

4/ أ) S المبلغ المستهلك في سنة 2019 إذن $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{12}$ و منه $S = u_1 \times \frac{1-q^{12}}{1-q} = 56000 \times \frac{1-(0.95)^{12}}{0.05}$ و منه $S = 514796.7\textbf{DA}$.

ب) المبلغ المدّخر في هذه السنة هو S' حيث : $S' = 70000 \times 12 - S = 325203.3\textbf{DA}$ أي : $S' = 325203.3\textbf{DA}$

حل التمرين الثالث (04 نقاط) من محور المتتاليات العددية

1/ أ) نضع : $P(n) : u_n < \frac{9}{2}$.

• من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 1$ و $1 < \frac{9}{2}$ إذن $P(0)$ صحيحة .

• نفرض أنّ $(P(n)$ صحيحة و نثبت أنّ $P(n+1)$ صحيحة حيث n عدد طبيعي .

$P(n)$ صحيحة معناه $u_n < \frac{9}{2}$ و منه $\frac{2}{3}u_n < 3$ و منه و $\frac{2}{3}u_n + \frac{3}{2} < 3 + \frac{3}{2}$ أي $u_{n+1} < \frac{9}{2}$ و منه $P(n+1)$ صحيحة و منه $u_n < \frac{9}{2}$ من أجل كلّ عدد طبيعي n .

ب) $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_1 - u_0)$ لكن $u_1 = \frac{13}{6}$ أي $u_1 > u_0$ إذن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

(u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و محدودة من الأعلى بـ $\frac{9}{2}$ أذن فهي متقاربة

2/ أ) $v_n = u_n - \frac{9}{2}$ ، $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{9}{2}$ و منه $v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{3}{2} - \frac{9}{2}$ و منه $v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 3$ و منه $v_{n+1} = \frac{2}{3}\left(u_n - \frac{9}{2}\right)$ إذن $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ من أجل كلّ عدد طبيعي n و منه (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ و حدّها الأول $v_0 = -\frac{7}{2}$.

ب) $v_n = v_0 \times q^n$ و منه $v_n = -\frac{7}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ، $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{9}{2}$.

3/ $S_n = \left(v_0 + \frac{9}{2}\right) + \left(v_1 + \frac{9}{2}\right) + \cdots + \left(v_n + \frac{9}{2}\right)$.

و $S_n = -\frac{7}{2} \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{9}{2}(n+1)$ و منه

$$S_n = -\frac{21}{2}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{9}{2}(n+1)$$

حل التمرين الرابع (08 نقاط) من محور الدوال الأسية و اللوغاريتمية

I) 1/ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x\overset{>}{\to}0} g(x) = -\infty$.

2/ $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ من أجل كلّ x من المجال $]0;+\infty[$ و منه $g(x) > 0$ مهما كان x من المجال $]0;+\infty[$ ، إذن g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

جدول التغيرات :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

3/ $g(1) = 0$ و منه إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II) 1/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = 2$.

2/ $f'(x) = x^2 - 2 + 1 + \ln x$ أي $f'(x) = x^2 - 1 + \ln x$

$f'(x) = g(x)$ من أجل كلّ عدد حقيقي موجب تماما .

3/ f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]0;1[$.

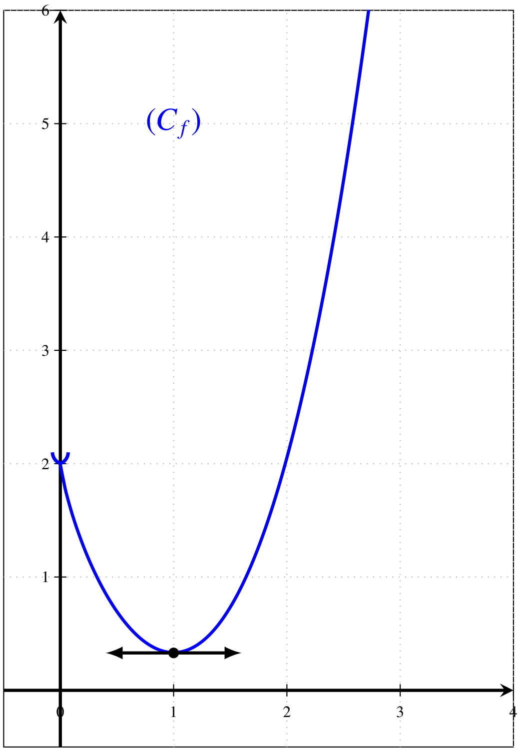
جدول التغيرات :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 2	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

4/ $f(2) = \frac{2}{3} + 2\ln 2$.

رسم (C_f) (في آخر حل الموضوع الأوّل) .

5 لدينا $F'(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x + 2 + x\ln x + \frac{1}{2}x$ و منه $F'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 2 + x\ln x$ و منه $F'(x) = f(x)$ من أجل x من المجال $]0;+\infty[$ و منه F دالة أصلية على المجال $]0;+\infty[$.



حل الموضوع الثاني

حل التمرين الأول (04 نقاط) من محور الدوال العددية

1/ الإقتراح الصحيح هو ج ، التبرير : $F'(x) = f(x)$ و $F(1) = 0$ حيث $F(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2 + \frac{8}{9}$.

2/ الإقتراح الصحيح هو ب ، التبرير : القيمة المتوسطة لـ f على المجال $[0,1]$ هي $m = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)dx$ أي $m = \left[F(x)\right]_0^1$ أي $m = \left[\frac{1}{9}x^3 - x^2 + \frac{8}{9}\right]_0^1$ أي $m = -\frac{8}{9}$.

3/ الإقتراح الصحيح هو أ ، التبرير : $f'(x) = \frac{2}{3}x - 2$ و $f'(x) \geq 0$ على المجال $]3;+\infty[$.

4/ الإقتراح الصحيح هو أ ، التبرير : $f(1) = f(5) = -\frac{5}{3}$.

حل التمرين الثاني (04 نقاط) من محور المتتاليات العددية

1/ لدينا $8\ln 2 = \ln v_5 + \ln v_3$ و منه $\ln(v_5 \times v_3) = \ln 2^8$ و لدينا أيضا $\ln v_5 - \ln v_3 = 2\ln 2$ و منه $\ln\frac{v_5}{v_3} = \ln 2^2$ ، مما سبق نجد $v_5 \times v_3 = 2^8$ و $\frac{v_5}{v_3} = 2^2$ وجدنا : $\begin{cases} v_5 \times v_3 = 2^8 \cdots (1) \\ \frac{v_5}{v_3} = 2^2 \cdots (2) \end{cases}$

من (2) نجد $v_3 = \frac{v_5}{2^2}$ ، نعوض في (1) نجد $v_5^2 = 2^{10}$ و منه $v_5 = 2^5$ أي $v_5 = 32$ ، نعوض في (2) نجد $v_3 = 2^3$ أي $v_3 = 8$.

2/ أ) لدينا $v_5 = v_3 \times q^2$ و منه $2^5 = 2^3 \times q^2$ و منه $q^2 = 2^2$ ، بما أنّ $q > 0$ أذن $q = 2$ ، $v_3 = v_0 \times q^3$ و منه $2^3 = v_0 \times 2^3$ و منه $v_0 = 1$.

ب) $v_n = v_0 \times q^n$ بالتعويض نجد $v_n = 2^n$.

ج) العدد 1024 حد من حدود (v_n) لأنّ $2^{10} = 1024$ أي $v_{10} = 1024$.

3/ أ) $w_n = u_n + v_n$ حيث $u_n = 2n - 3$ مع (u_n) حسابية أساسها 2 و حدها الأوّل $u_0 = -3$.

ب) $S_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) + v_0 \times \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}$ أي $S_n = 2^{n+1} - 1 + \frac{(n+1)(2n-6)}{2}$ و منه $S_n = 2^{n+1} - 1 + (n+1)(n-3)$

حل التمرين الثالث (04 نقاط) من محور المتتاليات العددية

1/ أ) نضع : $P(n) : u_n > 3$.

- من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 5$ و $5 > 3$ إذن $P(0)$ صحيحة .
- نفرض أنّ $P(n)$ صحيحة و نثبت أنّ $P(n+1)$ صحيحة حيث n عدد طبيعي .

$P(n)$ صحيحة معناه $u_n > 3$ و منه $\frac{5}{7}u_n > \frac{15}{7}$ و منه $\frac{5}{7}u_n + \frac{6}{7} > \frac{15}{7} + \frac{6}{7}$ أي $u_{n+1} > \frac{21}{7}$ أي $u_{n+1} > 3$ و منه $P(n+1)$ صحيحة و منه $u_n > 3$ من أجل كلّ عدد طبيعي n .

2/ ب) $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{5}{7}\right)^n (u_1 - u_0)$ لكن $u_1 = \frac{31}{7}$ أي $u_1 < u_0$ إذن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

(u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ و محدودة من الادنى بـ 3 إذن فهي متقاربة .

3/ أ) $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{5}{7}u_n + \frac{6}{7} - 3$ و منه $v_{n+1} = \frac{5}{7}u_n - \frac{15}{7}$ أي $v_{n+1} = \frac{5}{7}(u_n - 3)$ أي $v_{n+1} = \frac{5}{7}v_n$ إذن (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{5}{7}$ و $v_0 = 2$.

ب) $v_n = v_0 \times q^n$ و منه $v_n = 2 \times \left(\frac{5}{7}\right)^n$.

ج) $u_n = v_n + 3$ و منه $u_n = 2 \times \left(\frac{5}{7}\right)^n + 3$ ، $\lim_{n \to +\infty} u_n = 3$.

4/ $u_n < \frac{7}{2}$ و منه $2 \times \left(\frac{5}{7}\right)^n + 3 < \frac{7}{2}$ أي $2 \times \left(\frac{5}{7}\right)^n < \frac{1}{2}$ أي $\left(\frac{5}{7}\right)^n < \frac{1}{4}$ و منه $n > \frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{\ln\left(\frac{5}{7}\right)}$ أي $n > 4.12$ أي $n \geq 5$ أي أصغر قيمة لـ n حتى يكون $u_n < \frac{7}{2}$ هي $n = 5$

حل التمرين الرابع (08 نقاط) من محور الدوال الأسية و اللوغارتمية

I) 1/ g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و مستمرّة و $0 \in]-\infty;+\infty[$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ، لدينا $g(0.9) \times g(1) < 0$ إذن $0.9 < \alpha < 1$.

2/ اشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II) 1/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$.

2/ أ) لدينا $f(x)-(3x-2)=-\dfrac{2\ln x}{x^2}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{2\ln x}{x^2}=0$ ، إذن (Δ) ذو المعادلة $y=3x-2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

ب) ندرس إشارة $f(x)-y$ حيث $f(x)-y=-\dfrac{2\ln x}{x^2}$

x	0		1		$+\infty$
$-\dfrac{2\ln x}{x^2}$	‖	$+$	0	$-$	

و منه الوضعية النسبية بين (Δ) و (C_f) كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$+$	0	$-$	
الوضعية	‖	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$	(C_f) تحت (Δ)	

3/ أ) $f'(x)=3-\dfrac{2\times\frac{1}{x}\times x^2-4x\ln x}{x^4}$ و منه

$f'(x)=\dfrac{3x^3-2+4\ln x}{x^3}$ أي $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$.

ب) f متناقصة على المجال $]0;\alpha[$ و متزايدة تماما على المجال $]\alpha;+\infty[$.

جدل التغيرات :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4/ الرسم في آخر حل الموضوع الأوّل .

5/ أ) $H'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-1-\ln x}{x^2}$ أي $H'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$ و منه

H أصلية لـ $x\longmapsto-\dfrac{\ln x}{x^2}$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب) المساحة هي $\mathscr{A}$ حيث $\mathscr{A}=\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$ أي

$\mathscr{A}=\left[\dfrac{3}{2}x^2-2x+\dfrac{2+2\ln x}{x}\right]_1^2$ و منه $\mathscr{A}=\dfrac{3}{2}+\ln 2\,\mathbf{ua}$ و

منه $\mathscr{A}=6+4\ln 2\,\mathbf{cm^2}$

الرسم :