الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية سطيف. اختبار البكالوريا التجريبي –ماي–2025

ثانويات: مقاطعة سطيف 02. الشعبة: تسيير واقتصاد.

اختبار في مادة: الرياضيات المدة: 03 ساعات ونصف

على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التبرير:

1) الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -e^x + \frac{1}{e^x+1}$ دالتها المشتقة f' معرفة بالعبارة:

أ) $f'(x) = -e^x + \frac{1}{(e^x+1)^2}$ ب) $f'(x) = -e^x - \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ جـ) $f'(x) = -e^x + \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = -\left(\frac{2025}{2024}\right)^n + 1$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ تساوي:

أ) $-\infty$ ب) $+\infty$ جـ) 1

3) مجموعة حلول المتراجحة: $2 - 2x\,ln\,3 \geq 0$ في $\mathbb{R}$ هي:

أ) $\left]-\infty; e^{\frac{1}{3}}\right]$ ب) $\left]\frac{1}{ln\,3}; +\infty\right[$ جـ) $\left]-\infty; \frac{1}{ln\,3}\right]$

4) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{x^2+3x+4}{x}$، القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;3]$ هي:

أ) $5 + 2\,ln\,3$ ب) $5 - 3\,ln\,2$ جـ) $5 - 2\,ln\,3$

التمرين الثاني (05 نقاط)

α عدد حقيقي، (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول: $u_0 = \alpha$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n: $3\,u_{n+1} = u_n - 2$

I) عيّن قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

II) نضع في كلٍّ ممّا يأتي $\alpha = 3$.

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -1$.

2) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ، ثم استنتج أنّ (u_n) متقاربة.

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + 1$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ يُطلب حساب حدها الأول v_0 .

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n .

ج) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1$ ، ثم احسب نهاية المتتالية (u_n).

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$ و $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_{n-1}$

1) احسب كلّا من: S_n و P_n بدلالة n.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) أ) تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ: $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x^2 - 3x + 2)$

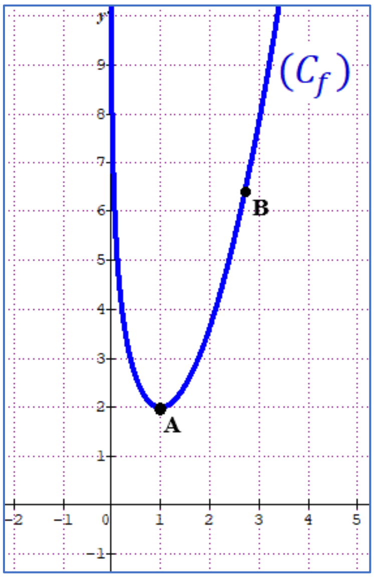
ب) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

2) استنتج في المجال $]0;+\infty[$ مجموعة حلول المتراجحة: $(ln\,x)^3 - 2(ln\,x)^2 - (ln\,x) + 2 \geq 0$

3) حُل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $e^{2x} + 2e^{-x} = 2e^{x} + 1$

4) حُل في المجال $]-\infty;4[$ المتراجحة: $ln(-x^3 + 3x^2 + 4x + 4) < 2ln(2)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)



I. a و b عددان حقيقيان.

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ :

$$f(x) = x^2 + a + b\,ln(x)$$

$A(1;2)$ و $B(e; e^2 - 1)$ نقطتان من (C_f) (لاحظ الشكل المقابل)

1) بقراءة بيانية عين $f'(1)$ ، $f(1)$ و $f(e)$.

2) بيّن أنّ $a = 1$ و $b = -2$.

3) شكّل كُلّا من جدول تغيرات الدالة f، وجدول إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ :

$$g(x) = x + \frac{1}{x} + 2\frac{ln(x)}{x}$$

(C_g) التمثيل البياني لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1\,cm$

1) بيّن أن: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = -\infty$ ثم احسب نهاية الدالة g عند $+\infty$.

2) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $g'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.

4) بيّن أن المنحنى (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته: $y = x$ عند $+\infty$ ثم ادرس وضعية (C_g) بالنسبة لـ (Δ)

5) اكتب معادلة لـ(T) مماس المنحنى (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة $e^{\frac{1}{2}}$.

6) أنشئ كلا من (Δ) ، (T) و (C_g).

III. نعتبر الدالة العددية H المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $H(x) = (ln(x))^2$

1) بيّن أن الدالة H هي دالة أصلية للدالة h على المجال $]0;+\infty[$، حيث: $h(x) = 2\frac{ln(x)}{x}$

2) احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_g) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = e$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) (v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حدّها الأول $v_0 = 1$ و $v_0 + v_1 + v_2 = 7$.

– بيّن أنّ أساس المتتالية (v_n) هو 2 ، ثم اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_n = ln(v_n)$

– بيّن أنّ المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{ln2}{2}(n^2 + n)$.

ب) عيّن قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون: $S_n = ln\sqrt{2}^{650}$.

التمرين الثاني (04 نقاط)

يمثل الجدول التالي عدد الحواسيب التي تمّ بيعها خلال 6 سنوات لشركة لصنع الأجهزة الإلكترونية (العدد بالآلاف):

السنة	2020	2021	2022	2023	2024	2025
الرتبة x_i	1	2	3	4	5	6
عدد الحواسيب بالآلاف y_i	20	30	43	63	92	135

1) أ) مثّل سحابة النقط $M_i(x_i, y_i)$ في معلم متعامد ($1cm$ لكل سنة و $1cm$ لكل 10 آلاف حاسوب)

ب) هل يمكن القيام بتسوية خطية؟ برر إجابتك.

2) نضع: $z_i = \ln y_i$ أكمل الجدول التالي (تعطى النتائج مدورة إلى 10^{-2}):

الرتبة x_i	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln y_i$	....	....	....	....	....	....

أ) أنشئ سحابة النقط $M_i(x_i; z_i)$

ب) احسب $(\bar{X}, \bar{Z})$ إحداثيات النقطة G ، النقطة المتوسطة لسحابة النقط $M_i(x_i; z_i)$ ثم علّمها.

ج) بيّن أنّ معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا للسلسلة $(x_i; z_i)$ تُعطى بـ : $z = 0.37x + b$ ، حيث b عدد حقيقي يُطلب تعيينه.

3) أثبت أنّ عدد الحواسيب المُباعة يمثل بعلاقة من الشكل $y = ke^{0.37x}$ حيث k عدد حقيقي موجب تماما يُطلب تعيينه (مدورا إلى الوحدة).

4) بفرض أنّ عدد الحواسيب المُباعة يتزايد بنفس الوتيرة، ماهي السنة التي يبلغ فيها عدد المبيعات حوالي مليون حاسوب؟

التمرين الثالث (05 نقاط)

f دالة معرفة على: $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

يُعطى جدول تغيراتها المُقابل:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	e	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$	↘	$-\infty$

– تمعّن في جدول تغيرات الدالة f ثمّ أجب **مع التبرير** عمّا يأتي:

1) حدّد المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) ، ثم استنتج $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\left(\frac{1446}{f(x)}\right)$.

2) شكل جدول إشارة الدالة f.

3) قارن بين العددين $f(2)$ و $f(-2)$.

4) اكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 3.

5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x+\frac{4}{e^x+2}$

(C_f)تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2\,cm$

1) **أ)** بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=2x+2-\frac{2e^x}{e^x+2}$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2) بيّن أنّ المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y=2x+2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

3) **أ)** بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=2x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ).

4) **أ)** أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ: $f'(x)=\frac{2e^{2x}+4e^x+8}{(e^x+2)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

5) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $-0.9<\alpha<-0.8$

6) أنشئ كلا من (Δ) ، (Δ') و (C_f).

7) نعتبر الدالة العددية H المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $H(x)=2x-2\ln(e^x+2)$

أ) بيّن أن الدالة H هي دالة أصلية للدالة: $h:x\mapsto\frac{4}{e^x+2}$.

ب) احسب بـcm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y=2x$ ، $x=\ln(2)$ و $x=\ln(5)$.

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح النموذجي لبكالوريا التجريبي شعبة تسيير واقتصاد	التنقيط

الموضوع الأول

حل التمرين الأول : 4 ن

تعيين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاث المعطاة في كل حالة مع التبرير:

1/ الاقتراح الصحيح هو :**الاقتراح ب)** 0.25

التبرير : لدينا 0.75

$$f'(x)=\left(-e^x\right)'+\left(\frac{1}{e^x+1}\right)'=-e^x-\left(\frac{\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2}\right)=-e^x-\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

2/ الاقتراح الصحيح هو :**الاقتراح أ)** 0.25

التبرير : لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-\left(\frac{2025}{2024}\right)^n+1\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-\left(\frac{2025}{2024}\right)^n+1\right]=-\infty$ لأنّ $\frac{2025}{2024}\succ 1$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2025}{2024}\right)^n=+\infty$. 0.75

3/ الاقتراح الصحيح هو :**الاقتراح ج)** 0.25

التبرير: لدينا $2-2x\ln 3\geq 0$ معناه $-2x\ln 3\geq -2$ معناه $x\leq\frac{-2}{-2\ln 3}$ معناه $x\leq\frac{1}{\ln 3}$ وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة السابقة هي $\left]-\infty;\frac{1}{\ln 3}\right]$ 0.75

4/ الاقتراح الصحيح هو :**الاقتراح أ)** 0.25

التبرير: لتكن m القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;3]$ 0.75

$$m=\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^3\left(\frac{x^2+3x+4}{x}\right)dx=\frac{1}{2}\int_1^3\left(x+3+\frac{4}{x}\right)dx$$

ومنه $m=\left[\frac{1}{2}x^2+3x+4\ln x\right]_1^3=5+2\ln 3$.

حل التمرين الثاني: 5 ن

I. **تعيين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة:** (u_n) ثابتة معناه $\alpha=\frac{1}{3}\alpha-\frac{2}{3}$ أي $\frac{2}{3}\alpha=-\frac{2}{3}$ ومنه $\alpha=-1$. 0.5

II. نضع $u_0=3$

1) **البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n>-1$:** 0.75

نسمي $p(n)$ الخاصية: "من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>-1$"

من اجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 3 > -1$ ومنه $p(0)$ صحيحة.

نفرض أن الخاصية $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $u_n > -1$ ونبرهن صحة $p(n+1)$

لدينا $u_n > -1$ أي $\frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3} > -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$ ومنه $u_{n+1} > -1$ وبالتالي حسب مبدأ البرهان بالتراجع فإن $p(n)$ صحيحة أي $u_n > -1$ من أجل كل عدد طبيعي n .

0.75

2) **تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$:**

لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3} - u_n = -\frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}(u_n + 1)$

وبما أن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > -1$ أي $u_n + 1 > 0$ ومنه $-\frac{2}{3}(u_n + 1) < 0$

أي $u_{n+1} - u_n < 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

0.25

الاستنتاج : بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

3) (v_n)متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $v_n = u_n + 1$

0.5

أ) **اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$وحساب حدّها الأول :**

0.25

لدينا $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(u_n + 1) = \frac{1}{3}\ v_n$

و حدها الأول v_0 هو $v_0 = u_0 + 1 = 3 + 1 = 4$

0.5

ب) **كتابة v_n بدلالة n:** $v_n = v_0 \times q^n = 4 \times (\frac{1}{3})^n$

0.25

ج) **كتابة u_n بدلالة n:** لدينا $v_n = u_n + 1$ أي $u_n = v_n - 1$ ومنه $u_n = 4 \times (\frac{1}{3})^n - 1$

0.25

لدينا $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ إذن $\lim_{n\to+\infty} u_n = -1$

4)نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$ و $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_{n-1}$

حساب S_n بدلالة n :

0.5

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 - 1 + v_1 - 1 + \cdots + v_{n-1} - 1 \\ &= v_0 + v_1 + \cdots + v_n - 1(n) \\ &= 4\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}\right) - (n) \\ &= 6\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) - (n) \end{aligned}$$

حساب P_n بدلالة n :

0.5

لدينا $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_{n-1}$ ومنه

$$\begin{aligned} P_n &= v_0 \times v_0 \times q \times \ldots \times v_0 \times q^{n-1} \\ &= {v_0}^n \times q^{1+2+\cdots+n-1} \\ &= 4^n \times (\frac{1}{3})^{\frac{n}{2}(n-1)} \end{aligned}$$

4 ن

حل التمرين الثالث :

0.25

1/ أ- **التحقق أنّه من اجل كل عدد حقيقي** x : $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x^2 - 3x + 2)$.

لدينا $(x+1)(x^2 - 3x + 2) = x^3 - 3x^2 + 2x + x^2 - 3x + 2 = x^3 - 2x^2 - x + 2$

0.75

ب- **حل في $\mathbb{R}$ المعادلة** $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$:

لدينا $x^3-2x^2-x+2=0$ معناه $(x+1)(x^2-3x+2)=0$ معناه $(x+1)=0$ أو $(x^2-3x+2)=0$

وبالتالي نجد مجموعة حلول المعادلة السابقة هي $S=\{-1;1;2\}$.

0.5 2/ **استنتاج في المجال** $]0;+\infty[$ **مجموعة حلول المتراجحة** $(\ln x)^3-2(\ln x)^2-(\ln x)+2\geq 0$:

نضع المعادلة $(\ln x)^3-2(\ln x)^2-(\ln x)+2=0........(*)$

بوضع $X=\ln(x)$ في المعادلة $(*)$ تصبح كالتالي $X^3-2X^2-X+2=0$ و هي معادلة مكافئة للمعادلة الأولى

وبالتالي حلولها هي $\{-1;1;2\}$ ومنه حلول المعادلة $(*)$ هي $\{e^{-1};e^{1};e^{2}\}$ ونلخص إشارة العبارة في الجدول التالي :

x	0		e^{-1}		e^{1}		e^{2}		$+\infty$
$(\ln x)^3-2(\ln x)^2-(\ln x)+2$	||	-	0	+	0	-	0	+	

0.5 ومنه مجموعة حلول المتراجحة $(\ln x)^3-2(\ln x)^2-(\ln x)+2\geq 0$ في المجال $]0;+\infty[$ هي

$[e^{-1};e]\cup[e^{2};+\infty[$

3/ حل المعادلة $e^{2x}+2e^{-x}=2e^{x}+1$ في $\mathbb{R}$:

1 لدينا $e^{2x}+2e^{-x}=2e^{x}+1$ بضرب طرفي المعادلة في e^{x} تصبح كالتالي $e^{3x}+2e^{0}=2e^{2x}+e^{x}$ ومنه

$e^{3x}+2\times 1-2e^{2x}-e^{x}=0$ أي $e^{3x}-2e^{2x}-e^{x}+2=0$ وبوضع $Y=e^{x}$ نجد $Y^3-2Y^2-Y+2=0$ والتي هي

معادلة مكافئة لمعادلة السؤال الأول التي حلولها $\{-1;1;2\}$ ومنه قيم Y هي $\{1;2\}$ (-1 مرفوض لأن $Y=e^{x}\succ 0$)

ومنه قيم x هي $\{\ln(1)=0;\ln(2)\}$ ومنه حلول المعادلة $e^{2x}+2e^{-x}=2e^{x}+1$ في $\mathbb{R}$ هي $\{0;\ln(2)\}$.

4/ حل في المجال $]-\infty;4]$ المتراجحة $\ln(-x^3+3x^2+4x+4)\succ 2\ln(2)$:

1 لدينا $\ln(-x^3+3x^2+4x+4)\succ 2\ln(2)$ معناه $\ln(-x^3+3x^2+4x+4)\succ \ln(4)$ ومنه

$-x^3+3x^2+4x+4\succ 4$ ومنه $-x^3+3x^2+4x\succ 0$ أي $x(-x^2+3x+4)\succ 0$ ندرس إشارة العبارة

$x(-x^2+3x+4)$ ثم نستخلص الحلول في المجال $]-\infty;4]$

x	$-\infty$		-1		0		4
$x(-x^2+3x+4)$		+	0	-	0	+	0

ومنه مجموعة حلول المترجحة $\ln(-x^3+3x^2+4x+4)\succ 2\ln(2)$ هي $]-\infty;-1[\cup]0;4[$

حل التمرين الرابع

7ن

I. لدينا $f(x)=x^2+a+b\ln(x)$

1. **بقراءة بيانية** : لدينا (C_f) يشمل النقطتين $A(1;2)$ و $B(e;e^2-1)$ والنقطة A نقطة حدية لـ (C_f)

0.75 إذن نجد : $f(1)=2$ ، $f'(1)=0$ و $f(e)=e^2-1$.

2. **تبيّين أنّ** $a=1$ و $b=-2$:

0.5 لدينا $f(1)=2$ معناه $f(1)=1+a+b\ln(1)=1+a=2$ ومنه $a=1$.

لدينا $f(e)=e^2-1$ معناه $f(e)=e^2+1+b\ln(e)=e^2+1+b=e^2-1$ ومنه $b=-2$.

3. تشكيل كلا من جدول تغيرات الدالة f وجدول إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:

جدول التغيرات

0.5

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

جدول الإشارة

0.5

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$	$+$	

.II

1. تبيان أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=-\infty$ وحساب نهاية الدالة g عند $+\infty$:

0.5

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(x+\frac{1}{x}+2\frac{\ln(x)}{x}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(x+\frac{1}{x}(1+2\ln(x))\right)=-\infty$$

التفسير البياني (C_g): يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=0$ (حامل محور التراتيب).

0.25

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}+2\frac{\ln(x)}{x}\right)=+\infty$$

2. **التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :** $g'(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$

0.5

$$g'(x)=1-\frac{1}{x^2}+2\frac{\frac{1}{x}x-1\ln(x)}{x^2}=\frac{x^2-1+2(1-\ln(x))}{x^2}=\frac{x^2+1+-2\ln(x)}{x^2}=\frac{f(x)}{x^2}$$

3. **استنتاج اتجاه تغير الدالة g ثم تشكّيل جدول تغيراتها :**

.025

بما أن $g'(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}\succ 0$ على $]0;+\infty[$ فإن الدالة g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g :

0.5

x	0		$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. **تبيّان أن المنحنى (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته: $y=x$ بجوار $+\infty$ ثم دراسة وضعية (C_g) بالنسبة إلى (Δ) :**

0.25

0.5 لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+2\frac{\ln(x)}{x}\right)=0$ ومنه (Δ) مستقيم مقارب لـ (C_g) بجوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي لـ (C_g) و (Δ):

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما $g(x)-x=\frac{1}{x}+2\frac{\ln(x)}{x}=\frac{1+2\ln(x)}{x}$:

إشارة $g(x)-x$ من إشارة $1+2\ln(x)$ وعليه نضع $1+2\ln(x)=0$ فنجد $x=e^{-\frac{1}{2}}$ وعليه

0.5 لما $x\in\left]0;e^{-\frac{1}{2}}\right[$ نجد $g(x)-x\prec 0$ ومنه (C_g) يقع تحت (Δ)، ولما $x=e^{-\frac{1}{2}}$ نجد $g(x)-x=0$ ومنه (C_g) يقطع (Δ)

ولما $x\in\left]e^{-\frac{1}{2}};+\infty\right[$ نجد $g(x)-x\prec 0$ ومنه (C_g) يقع فوق (Δ).

5. كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة $e^{\frac{1}{2}}$.

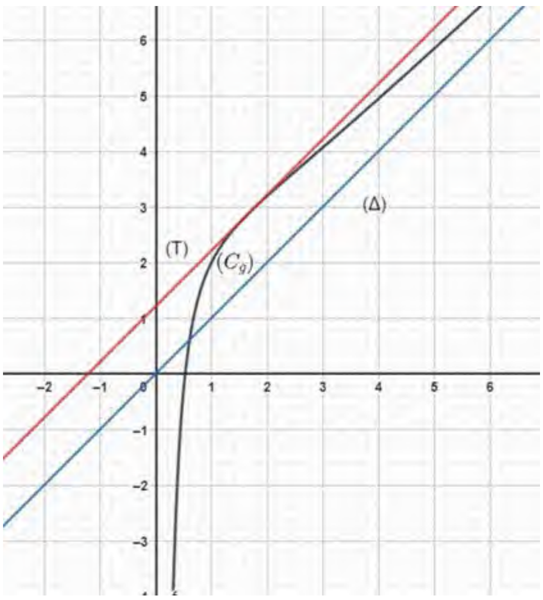
$(T): y=g'\left(e^{\frac{1}{2}}\right)\left(x-e^{\frac{1}{2}}\right)+g\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$ و $g'\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{e}=\frac{e+1-2\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{e}=\frac{e}{e}=1$ و

$g\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=e^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}+2\frac{\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{e^{\frac{1}{2}}}=e^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{e^{\frac{1}{2}}}$ و $g'\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{e}=\frac{e+1-2\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{e}=\frac{e}{e}=1$

إذن نجد $(T): y=1\left(x-e^{\frac{1}{2}}\right)+e^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{e^{\frac{1}{2}}}=x+\frac{2}{e^{\frac{1}{2}}}$ ومنه

$(T): y=x+2e^{-\frac{1}{2}}$

0.75 **6. إنشاء كلا من (Δ) ، (T) و (C_g):**



III- نعتبر الدالة العددية H المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$H(x)=\left(\ln(x)\right)^2$

0.25 **1. تبيان أن الدالة H هي دالة أصلية للدالة h حيث: $h(x)=2\frac{\ln(x)}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$:**

0.5 $H'(x)=2\times\frac{1}{x}\ln(x)=2\frac{\ln(x)}{x}=h(x)$

2. حساب بـ cm^2 المساحة S للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_g) و المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما على الترتيب $x=1$ و $x=e$:

$$\int_1^e (g(x)-x)dx=\int_1^e \frac{1}{x}+2\frac{\ln(x)}{x}dx=\left[\ln(x)+\left(\ln(x)\right)^2\right]_1^e=2cm^2$$

الموضوع الثاني

4 ن **حل التمرين الأول :**

1) (v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حدّها الأول $v_0=1$ (موجب) إذن أساسها يكون موجب.

0.75 تبيان أنّ أساس المتتالية هو 2 وكتابة عبارةالحد العام v_n بدلالة n :

نضع q أساس المتتالية (v_n) بما أنّ (v_n) هندسية فإنّ $v_1=v_0q=q$ و $v_2=v_0q^2=q^2$ إذن

$v_0+v_1+v_2=1+q+q^2$

ومنه $q^2+q+1=7$ ومنه: $q^2+q-6=0$ هي معادلة من الدرجة الثانية حلولها هي $q_1=2$ و $q_2=-3$ (مرفوض لأن أساس المتتالية موجب ومنه أساس المتتالية (v_n) هو 2 .

كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n:

0.25 لدينا $v_n=v_0q^n$ ومنه $v_n=1\times 2^n=2^n$

2) لدينا المتتالية العددية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $u_n=\ln(v_n)$:

$u_n=\ln(v_n)$ معناه $u_n=\ln(2^n)=n\ln(2)$

تبيّان أنّ المتتالية (u_n) حسابية وتعيين أساسها :

0.75 $u_n=n\ln(2)$ معناه $u_{n+1}=(n+1)\ln(2)$ إذن $u_{n+1}-u_n=(n+1)\ln(2)-n\ln(2)$ $u_{n+1}-u=(n+1-n)\ln(2)=\ln(2)$ ومنه (u_n) حسابية وأساسها

0.25 هو $\ln(2)$.

حساب u_0 $u_0=\ln(v_0)=\ln(1)=0$:

3) بوضع من أجل كل عدد طبيعي n $S_n=u_0+u_1+u_2+......+u_n$:

1 أ) تبيّان أنّ $S_n=\frac{\ln 2}{2}(n^2+n)$:

$S_n=u_0+u_1+u_2+......+u_n$ إذن $S_n=0+1\ln(2)+2\ln(2)+...+n\ln(2)$ ومنه $S_n=(0+1+2+...+n)\ln(2)$

1 $0+1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ (مجموع متتالية حسابية أساسها 1 حدّها الأول 0) ومنه $S_n=\frac{n(n+1)}{2}\ln 2$

ب) تعييّن قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n=\ln\sqrt{2}^{650}$:

لدينا $S_n=\ln\sqrt{2}^{650}$ معناه $\frac{\ln 2}{2}(n^2+n)=\ln 2^{\frac{650}{2}}$ معناه

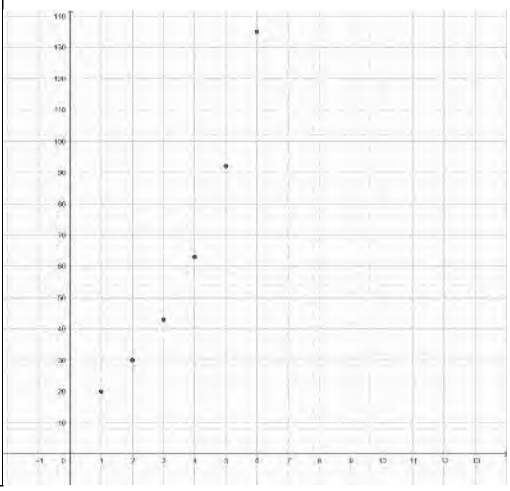
$\frac{(n^2+n)}{2}\ln 2=\frac{650}{2}\ln 2$ معناه $n^2+n=650$

معناه $n^2+n-650=0$ معادلة من الدرجة الثانية حلولها هي $n_1=25$ و $n_2=-26$ (مرفوض لأن n عدد طبيعي)، ومنه قيمة n هي 25 .

4ن **حل التمرين الثاني:**

0.5 1. أ- تمثيل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$

0.5 ب- نعم, يمكن القيام بتسوية خطية لأن السحابة بشكل متطاول



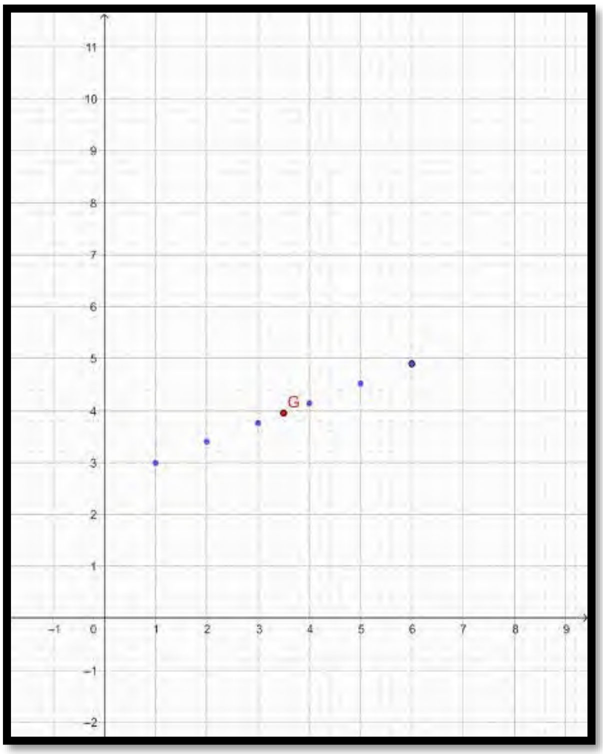
0.5

2. اكمال الجدول :

x_i	1	2	3	4	5	6	المجموع
z_i	2,99	3,40	3,76	4,14	4,52	4,90	
$x_i \times z_i$	2,99	6,8	11,28	16,52	22,6	29,4	89,59
$(x_i - \bar{x})^2$	6,25	2,25	0,25	0,25	2,25	6,25	17,5

0.5

أ- تمثيل سحابة النقط $M_i(x_i; z_i)$



0.5

ب- $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$;

$\bar{z} = \frac{2,99+3,40+3,76+4,14+4,52+4,90}{6} = 3,95$

النقطة المتوسطة لسحابة النقط $M_i(x_i; z_i)$ هي $G(\bar{x}; \bar{z})$ أي $G(3,5\ ;\ 3,95)$ وتعليمها.

0.75

ج- ايجاد معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا $(x_i; z_i)$:

لدينا: $a = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i z_i - \bar{x}\,\bar{z}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$

ومنه : $a = \frac{\frac{1}{6}\times 89,59 - 3,5\times 3,95}{\frac{1}{6}\times 17,5} = 0,37$

اذن: $\boldsymbol{z = 0,37x + b}$ ولدينا: $\boldsymbol{b = \bar{z} - a\bar{x}}$

ومنه: $b = 3,95 - 0,37 \times 3,5 = 2,655$

اذن : $\boldsymbol{z = 0,37x + 2,655}$

0.5

3. لدينا : $z = \ln y$ ومنه: $\ln y = 0,37x + b$

اذن: $y = e^{0,37x + 2,655}$

اذن: $\boldsymbol{y = e^{2,655} e^{0,37x}}$ اي $\boldsymbol{y = 14e^{0,37x}}$:

4. عدد المبيعات حوالي مليون حاسوب أي: $y = 1000000$ معناه: $10^6 = 14e^{0,37x}$

ومنه: $0,37\,x = \ln\left(\frac{10^6}{14}\right)$ اذن: $x = \frac{1}{0,37}\ln\left(\frac{10^6}{14}\right)$ وبالتالي: $\boldsymbol{x = 30}$

أي رتبة السنة الموافقة هي **30**

0.25

ومنه: السنة التي يبلغ فيها عدد الحواسيب حوالي مليون حاسوب **هي**: $2020 + 30 - 1 = 2049$

حل التمرين الثالث:

1. تحديد المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f)

ن5

$y = e$: معادلة مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) لأن : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = e$

$x = 1$: معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) لأن : $\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$

0.5

استنتاج : $\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(\frac{-1446}{f(x)}\right)$: $\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(\frac{-1446}{f(x)}\right) = 0$ لأنّ $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to 1}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = 0$

0.5

2.أ) تشكيل جدول إشارة $f(x)$:

0.5

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+$		$-$

0.75 **ب) المقارنة بين العددين $f(2)$ و $f(-2)$:**

لدينا $f(-2) \succ 0$ لأن الدالة موجبة تماما على المجال $]-\infty;1[$ و $-2 \in]-\infty;1[$

ولدينا $f(2) \prec 0$ لأن الدالة سالبة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و $2 \in]1;+\infty[$ ومنه $f(-2) \succ f(2)$.

0.75 **3.معادلة المماس (Δ) :** $y = f'(3)(x-3) + f(3)$ ومنه $y = 0(x-3) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ومنه $y = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

4.**المناقشة البيانية**: $f(x) = m$ مناقشة أفقية.

1 من خلال الجدول

لما $m \in \left]-\infty;\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right[$ يوجد حلان ،لمّا $m = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ يوجد حل واحد، لما $m \in \left]\ln\left(\frac{1}{2}\right);e\right[$ لا يوجد حلول

1

لما $m = e$ يوجد حل واحد.

حل التمرين الرابع:

ن7 1.أ- تبيين أن : $f(x) = 2x + 2 - \frac{2e^x}{e^x+2}$ $2x + 2 - \frac{2e^x}{e^x+2} = 2x + \frac{2(e^x+2)-2x}{e^x+2} = f(x)$

حساب النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

0.5 2.تبيّن أنّ المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = 2x + 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$:

+0.25

0.25 $(\Delta'): y = 2x + 2$: $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (2x+2)] = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2e^x}{e^x+2} = 0$

0.5 **الوضع النسبي** : بما أن: $\frac{-2e^x}{e^x+2} < 0$ فان: (C_f) يقع تحت (Δ') يساعد في الإنشاء.

3.أ) **تبيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ ثم دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) :**

$(\Delta): y = 2x$: $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - 2x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{e^x+2} = 0$

0.5 ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) : بما أن: $\frac{4}{e^x+2} > 0$ فان: (C_f) يقع فوق (Δ)

0.5 4. أ- أثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{2e^{2x} + 4e^x + 8}{(e^x+2)^2}$

0.5

لدينا $f'(x)=2-\frac{4e^x}{\left(e^x+2\right)^2}=\frac{2\left(e^x+2\right)^2-4e^x}{\left(e^x+2\right)^2}=\frac{2\left(e^{2x}+2e^x+4\right)}{\left(e^x+2\right)^2}$

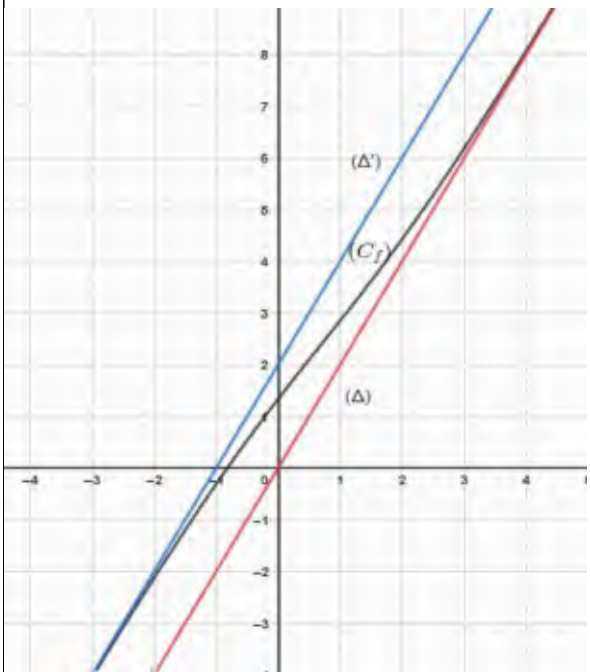
ب- **استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم تشكّيل جدول تغيراتها** : بما أن $f'(x)>0$ فان: الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

0.75 جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

5. تبين أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محورالفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $-0.9<\alpha<-0.8$

0.75 بما أن f مستمرة ورتيبة(متزايدة تماما) على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة ورتيبة(متزايدة تماما) على المجال $]-0.9;-0.8[$ و أيضا $f(-0.9)\approx-0.1$، $f(-0.8)\approx0.33$, ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $-0.9<\alpha<-0.8$



1.5 6. **انشاء (C_f)، (Δ') و (Δ):**

7. أ) **تبيين أن الدالة H هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{4}{e^x+2}$:**

0.5 $H'(x)=2-\frac{2e^x}{e^x+2}=\frac{4}{e^x+2}$

ب)**حساب مساحة الحيز بـ cm^2:**

0.5 $$\int_{\ln 2}^{\ln 5}[f(x)-2x]\,dx=\int_{\ln 2}^{\ln 5}\frac{4}{e^x+2}dx=[H(\ln 5)-H(\ln 2)]=[2\ln 5-2\ln 7-2\ln 2+2\ln 4]\times 2\times 2=8\ln\frac{10}{7}$$