المؤسسة: ثانوية الشهداء السبعة بوعيفل — **السنة الدراسية:** 2020_2021

المستوى: الثالثة رياضيات — **المدة:** ساعتان

الفرض الأول للفصل الأول في مادة الرياضيات

اختر موضوعا واحدا من بين الموضوعين و أجب عليه

الموضوع الأول

التمرين الأول(6ن):

في كل مما يلي، يوجد اجابة واحدة صحيحة عينها مع التبرير:

1) الكتابة المبسطة للعدد A حيث: $A=\ln\left(e+e^{-1}+2\right)-2\ln\left(e+1\right)$ هي:

أ)- $A=e+1$ ب)- $A=0$ ج)- $A=-1$

2) الحل العام للمعادلة التفاضلية: $2y-y'+1=0$ هو الدوال f حيث: (c ثابت حقيقي)

أ)- $f(x)=ce^{2x}-\frac{1}{2}$ ب)- $f(x)=ce^{x}-\frac{1}{2}$ ج)- $f(x)=ce^{2x}-2$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=......$:

أ) 0 ب) $+\infty$ ج) 1

4) f الدالة المعرفة على $[-2;2]$ بـ: $f(x)=|x|-\sqrt{4-x^2}$، (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 0:

أ)- مماسا معادلته: $y=x+1$ ب)- نقطة زاوية ج)- نصف مماس موازي لمحور التراتيب.

التمرين الثاني (14ن):

I) لتكن الدالة f_1 المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f_1(x)=\frac{1+\ln x}{x^2}$.

(C_1) التمثيل البياني للدالة f_1 في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب نهايات الدالة f_1 عند حدود مجموعة التعريف . فسر بيانيا النتيجتين .

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f_1 ثم شكل جدول تغيراتها .

3) بين أن (C_1) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها.

4) أنشئ (C_1) .

5) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f_1(x)=e^m$

II) n عدد طبيعي و $n\geq 2$، لتكن الدوال f_n المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي: $f_n(x)=\frac{1+n\ln x}{x^2}$ ، (C_n) التمثيل البياني للدالة f_n في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أدرس نهايات f_n عند حدود مجموعة التعريف . فسر بيانيا النتيجتين .

2) بين أن من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f_n'(x)=\frac{n-2-2n\ln x}{x^3}$

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f_n ثم شكل جدول تغيراتها .

4) بين أن كل المنحنيات (C_n) تشمل نقطة واحدة يطلب تعيينها.

5) أ) احسب $f_n\left(\frac{1}{2}\right)$ ثم بين أنه من أجل $n\geq 2$: $f_n\left(\frac{1}{2}\right)\prec 0$.

ب) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left]\frac{1}{2};1\right[$

6) أدرس الوضع النسبي لـ (C_n) و (C_{n+1}) .

7) أنشئ (C_2) و (C_3) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول(6ن):

في كل مما يلي، يوجد اجابة واحدة صحيحة عينها مع التبرير:

1) مجموعة حلول المتراجحة: $\ln(2-x)+\ln(x+3)-\ln 4\geq 0$ هي:

أ)- $s=[1;2]$ ب)- $s=]-2;1[$ ج)- $s=[-2;1]$

2) الحل العام للمعادلة التفاضلية: $2y+y'-1=0$ هو الدوال f حيث: (c ثابت حقيقي)

أ)- $f(x)=ce^{-2x}+\frac{1}{2}$ ب)- $f(x)=ce^{x}-\frac{1}{2}$ ج)- $f(x)=ce^{2x}-2$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=......$:

أ) 0 ب) $+\infty$ ج) 1

4) f الدالة المعرفة على $[-2;2]$ بـ: $f(x)=|x|+\sqrt{4-x^2}$، (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 0:

أ)- مماسا معادلته: $y=x+1$ ب)- نقطة زاوية ج)- نصف مماس موازي لمحور التراتيب.

التمرين الثاني(14ن):

I) لتكن الدالة f_1 المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_1(x)=\frac{4e^x}{e^x+7}$.

(C_1) التمثيل البياني للدالة f_1 في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f_1(x)=\frac{4}{1+7e^{-x}}$

ب)أحسب نهايات الدالة f_1 عند حدود مجموعة التعريف . ماذا تستنتج .

2) أ) بين أن الدالة f_1 متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها .

ب)استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $0\prec f_1(x)\prec 4$

3) أ) بين أن النقطة $I_1(\ln 7;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_1) .

ب) أكتب معادلة لـ (T_1) مماس المنحنى (C_1) في النقطة I_1.

4) أنشئ المنحنى (C_1) و المماس (T_1) .

5) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f_1(x)=\ln m$

II) n عدد طبيعي، نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_n(x)=\frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$، (C_n) التمثيل البياني للدالة f_n في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أنه من أجل عدد حقيقي x، $f_n(x)=f_1(nx)$. استنتج اتجاه تغير الدالة f_n .

2) اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n، المنحنيات (C_n) تشمل النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، المنحنى (C_n) يقطع المستقيم ذو المعادلة: $y=2$ في نقطة وحيدة I_n يطلب تعيين احداثياتها.

4) أكتب معادلة لـ (T_n) مماس المنحنى (C_n) في النقطة I_n.

أستاذة المادة تتمنى لكم كل التوفيق و النجاح: بن صافية

الإجابة المقترحة للفرض الأول:

التمرين الأول: من الموضوعين 1 و 2

الإجابة الصحيحة	التبرير
1)..........ج	$A=\ln\left(e+e^{-1}+2\right)-2\ln\left(e+1\right)=\ln\left(\frac{e+e^{-1}+2}{(e+1)^2}\right)=\ln\left(\frac{\frac{e^2+1+2e}{e}}{(e+1)^2}\right)=\ln\left(\frac{1}{e}\right)=-1$
2)..............أ	$2y-y'+1=0$ تكافيء $y'=2y-1$ حلولها هي الدوال من الشكل: $f(x)=ce^{2x}-\frac{1}{2}$;$c\in\mathbb{R}$
3)..............أ	من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا: $-1\le\sin x\le1$ و من أجل $x\succ0$: $\frac{-1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x}$ و بما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$
4)..............ب	$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\lvert x\rvert-\sqrt{4-x^2}+2}{x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{-x-\sqrt{4-x^2}+2}{x}=-1\\ \lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{x-\sqrt{4-x^2}+2}{x}=1\end{cases}$ الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند (0)، لكنها قابلة للإشتقاق على يمين الـ "0" و على يسار الـ "0".تمثيلها البياني يقبل نصفي مماسين معامل توجيههما (-1) و (1) ، يشكلان نقطة زاوية.
1)..............ج	المجموعة المرجعية للمتراجحة هي: $D=\left]-3;2\right[$. $\ln(2-x)+\ln(x+3)-\ln4\ge0$ منه: $\ln(2-x)+\ln(x+3)\ge\ln4$ أي: $\ln\left((2-x)(x+3)\right)\ge\ln4$ تكافيء: $\left((2-x)(x+3)\right)\ge4$ أي: $-x^2-x+2\ge0$ و بما أن: فان: $s=\left[-2;1\right]$ x: $-\infty$ -2 1 $+\infty$ $-x^2-x+2$: - + -
2).............أ	$2y+y'-1=0$ تكافيء $y'=-2y+1$ حلولها هي الدوال من الشكل: $f(x)=ce^{-2x}+\frac{1}{2}$;$c\in\mathbb{R}$
3)..........أ	من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا: $-1\le\cos x\le1$ و من أجل $x\succ0$: $\frac{-1}{x}\le\frac{\cos x}{x}\le\frac{1}{x}$ و بما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=0$
4)............ب	$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\lvert x\rvert+\sqrt{4-x^2}+2}{x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{-x+\sqrt{4-x^2}+2}{x}=-1\\ \lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{x+\sqrt{4-x^2}+2}{x}=1\end{cases}$ الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند (0)، لكنها قابلة للإشتقاق على يمين الـ "0" و على يسار الـ "0". تمثيلها البياني يقبل نصفي مماسين معامل توجيههما (-1) و (1) ، يشكلان نقطة زاوية.

التمرين الثاني من الموضوع الأول:

I) لتكن الدالة f_1 المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f_1(x)=\frac{1+\ln x}{x^2}$.

C_1 التمثيل البياني للدالة f_1 في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) حساب نهايات الدالة f_1 عند حدود مجموعة التعريف و التفسير البياني:

$$\lim_{x\to0^+}f_1(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1+\ln x}{x^2}=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}f_1(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{x^2}=0$$

C_1 يقبل محوري الإحداثيات كمستقيمين مقاربين.

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f_1 و تشكيل جدول تغيراتها:

f_1 قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و: $f_1'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}x^2-2x(1+\ln x)}{(x^2)^2}=\dfrac{-1-2\ln x}{x^3}$

لدينا: $x^3\succ 0$ اشارة $f_1'(x)$ من اشارة البسط $-1-2\ln x=0$ معناه: $x=e^{-\frac{1}{2}}$

x	0 $\qquad$ $e^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $+\infty$
$f_1'(x)$	$+$ $\qquad$ $-$

f_1 دالة متزايدة تماما على المجال $\left]0;e^{-\frac{1}{2}}\right]$ و متناقصة تماما على المجال $\left[e^{-\frac{1}{2}};+\infty\right[$

x	0 $\qquad$ $e^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $+\infty$
$f_1'(x)$	$+$ $\qquad$ $-$
$f_1(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $\frac{e}{2}$ $\searrow$ 0

3) اثبات أن C_1 يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها:

f_1' قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و: $f_1''(x)=\dfrac{\frac{-2}{x}x^3-3x^2(-1-2\ln x)}{x^6}=\dfrac{1+6\ln x}{x^4}$

لدينا: $x^4\succ 0$ اشارة $f_1''(x)$ من اشارة البسط $1+6\ln x=0$ معناه: $x=e^{-\frac{1}{6}}$

x	0 $\qquad$ $e^{-\frac{1}{6}}$ $\qquad$ $+\infty$
$f_1''(x)$	$-$ $\qquad$ $+$

بما أن $f_1''(x)$ تنعدم مغيرة اشارتها فإن C_1 يقبل نقطة انعطاف احداثياتها: $\left(e^{-\frac{1}{6}};\frac{5}{6}e^{\frac{1}{3}}\right)$

4) انشاء C_1 : في أخر الورقة.

5) مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f_1(x)=e^m$:

e^m	0	$\frac{e}{2}$	$+\infty$
$f_1(x)=e^m$	حلان متمايزان	حل مضاعف	لا توجد حلول

منه:

m	$-\infty$	$\ln\frac{e}{2}$	$+\infty$
$f_1(x)=e^m$	حلان متمايزان	حل مضاعف	لا توجد حلول

II) n عدد طبيعي و $n\geq 2$، لتكن الدوال f_n المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي: $f_n(x)=\dfrac{1+n\ln x}{x^2}$

1) دراسة نهايات f_n عند حدود مجموعة التعريف وتفسير النتيجتين بيانيا :

$\lim\limits_{x\to 0^+}f_n(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1+n\ln x}{x^2}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}f_n(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1+n\ln x}{x^2}=0$

C_1 يقبل محوري الإحداثيات كمستقيمين مقاربين.

2) اثبات أن من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f_n'(x)=\frac{n-2-2n\ln x}{x^3}$

f_n قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و: $f_n'(x)=\frac{\frac{n}{x}x^2-2x(1+n\ln x)}{(x^2)^2}=\frac{n-2-2n\ln x}{x^3}$

3) دراسة اتجاه تغير الدالة f_n و تشكيل جدول تغيراتها :

لدينا: $x^3\succ 0$ اشارة $f_n'(x)$ من اشارة البسط $n-2-2n\ln x=0$ معناه: $x=e^{\frac{n-2}{2n}}$

x	0	$e^{\frac{n-2}{2n}}$	$+\infty$
$f_1'(x)$	$+$		$-$

f_n دالة متزايدة تماما على المجال $]0;e^{\frac{n-2}{2n}}]$ و متناقصة تماما على المجال $[e^{\frac{n-2}{2n}};+\infty[$

جدول التغيرات:

x	0	$e^{\frac{n-2}{2n}}$	$+\infty$
$f_1'(x)$	$+$		$-$
$f_1(x)$	$-\infty$ ↗	$ne^{\frac{2-n}{n}}$	↘ 0

4) اثبات أن كل المنحنيات C_n تشمل نقطة واحدة :

نعتبر العددين الطبيعيين n_1 و n_2 حيث: $n_1\neq n_2$

$f_{n_1}(x)=f_{n_2}(x)$ معناه: $\frac{1+n_2\ln x}{x^2}=\frac{1+n_1\ln x}{x^2}$ أي: $1+n_1\ln x=1+n_2\ln x$

منه: $n_1\ln x-n_2\ln x=0$ أي: $\ln x\,(n_1-n_2)=0$ اذن: $x=1$ كل المنحنيات C_n تشمل نقطة واحدة هي: $(1;1)$

5) أ) حساب $f_n\left(\frac{1}{2}\right)$: لدينا: $f_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1+n\ln\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=4(1-n\ln 2)$

لدينا: $n\geq 2$ منه: $-n\ln 2\leq -2\ln 2$ أي: $1-n\ln 2\leq -2\ln 2+1\prec 0$ منه: $f_n\left(\frac{1}{2}\right)\prec 0$

ب) اثبات أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]\frac{1}{2};1[$:

f_n دالة مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;e^{\frac{n-2}{2n}}]$.

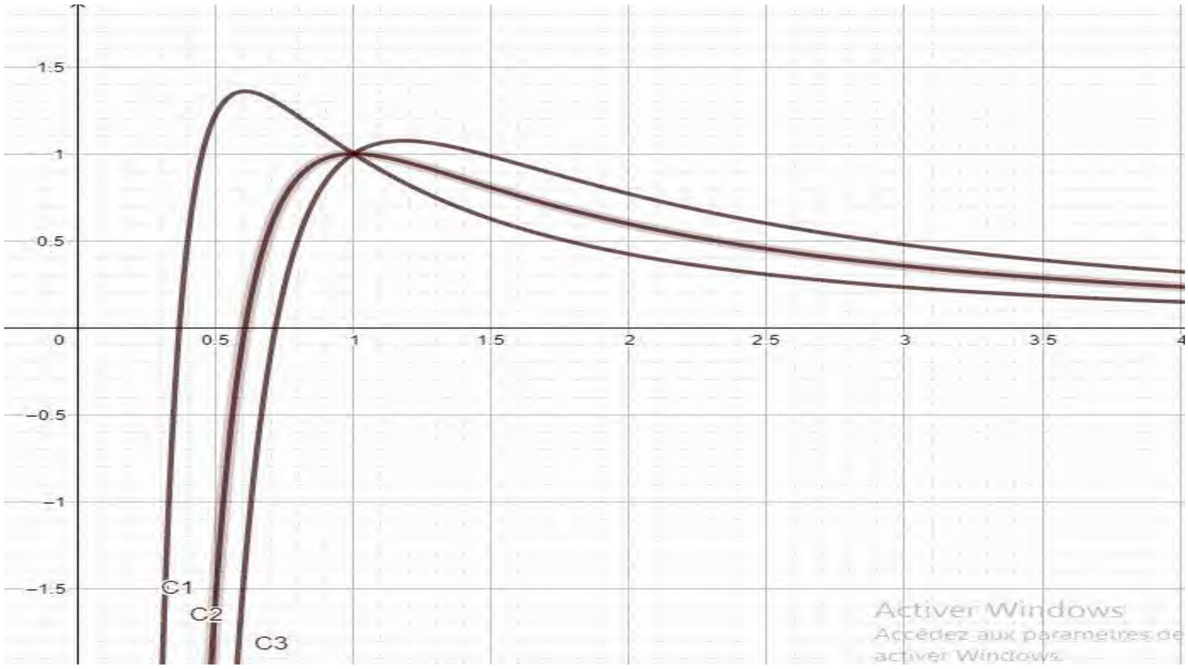
$f_n(1)=1$ و $f_n\left(\frac{1}{2}\right)\prec 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]\frac{1}{2};1[$

6) دراسة الوضع النسبي لـ C_n و C_{n+1} :

$f_{n+1}(x)-f_n(x)=\frac{1+(n+1)\ln x}{x^2}-\frac{1+n\ln x}{x^2}=\frac{\ln x}{x^2}$

x	0	1	$+\infty$
$f_{n+1}(x)-f_n(x)$	-		+
الوضع النسبي لـ C_n و C_{n+1}	C_{n+1} تحت C_n	C_{n+1} يقطع C_n	C_{n+1} فوق C_n

7) أنشئ C_2 و C_3 في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.



<u>**التمرين الثاني من الموضوع الثاني:**</u>

I) لتكن الدالة f_1 المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي : $f_1(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+7}$.

1) أ) التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f_1(x)=\dfrac{4}{1+7e^{-x}}$

$$f_1(x)=\frac{4e^x\times e^{-x}}{(e^x+7)e^{-x}}=\frac{4}{1+7e^{-x}}$$

ب)حساب نهايات الدالة f_1 عند حدود مجموعة التعريف:

$$\lim_{x\to+\infty}f_1(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{1+7e^{-x}}=4 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}f_1(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4e^x}{e^x+7}=0$$

(C_1) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لمحور الفواصل معادلتيهما: $y=4$ و $y=0$.

2) أ) اثبات أن الدالة f_1 متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و تشكيل جدول تغيراتها:

f_1 قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و: $f_1'(x)=\dfrac{4e^x(e^x+7)-e^x(4e^x)}{(e^x+7)^2}=\dfrac{28e^x}{(e^x+7)^2}$

لدينا: $f_1'(x)\succ 0$ منه: f_1 دالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f_1'(x)$	+
$f_1(x)$	0 ↗ 4

ب)استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $0\prec f_1(x)\prec 4$

من جدول التغيرات لدينا $0\prec f_1(x)\prec 4$.

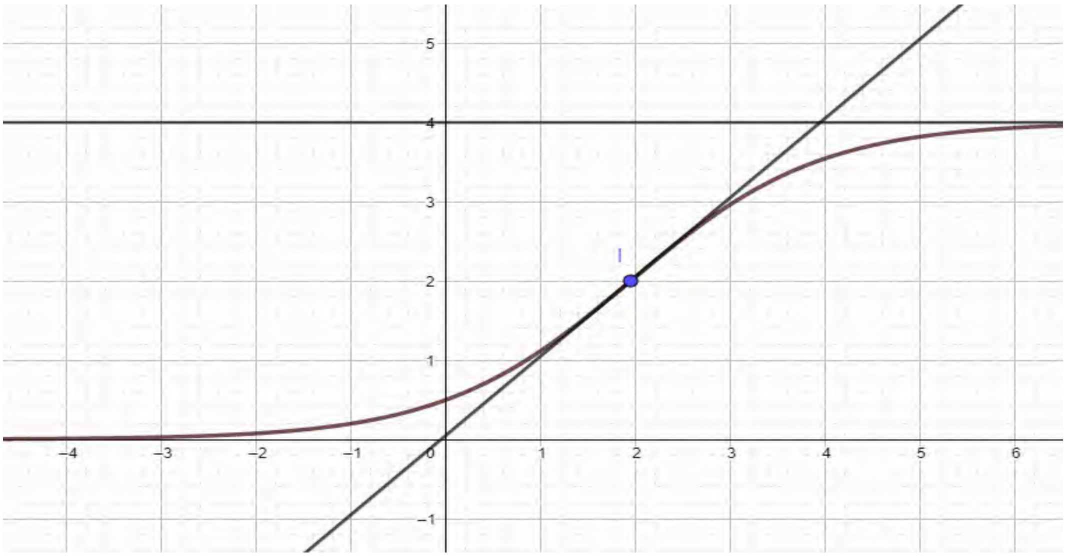
3) أ) تبيان أن النقطة $I_1(\ln 7;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_1) :

$$f_1(2\ln 7-x)+f_1(x)=\frac{4e^{2\ln 7-x}}{e^{2\ln 7-x}+7}+\frac{4e^x}{e^x+7}=\frac{4\times 7^2e^{-x}+7e^{-x}(4e^X)}{7^2e^{-x}+7}=4$$

بـ) كتابة معادلة لـ (T_1) مماس المنحنى (C_1) في النقطة I_1:

$$T_1 : y = f_1'(\ln 7)(x - \ln 7) + f_1(\ln 7)$$
$$y = x - \ln 7 + 2$$

4) انشاء المنحنى C_1 و المماس T_1 .



5) المناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f_1(x) = \ln m$

$\ln m$	$-\infty$	0		4		$+\infty$
$f_1(x) = \ln m$		لا توجد حلول		حل وحيد	لا توجد حلول	

منه:

m	0	1		e^4		$+\infty$
$f_1(x) = \ln m$		لا توجد حلول		حل وحيد	لا توجد حلول	

II) n عدد طبيعي، نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_n(x) = \dfrac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$

1) تبيان أنه من أجل عدد حقيقي x، $f_n(x) = f_1(nx)$:

لدينا: $f_1(nx) = \dfrac{4e^{nx}}{e^{nx}+7} = f_n(x)$

f_n قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f_n'(x) = nf_n'(nx) = \dfrac{28ne^{nx}}{(e^{nx}+7)^2}$

$f_n'(x) \geq 0$ منه الدالة f_n متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2) اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n، المنحنيات C_n تشمل النقطة $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$:

لدينا: $f_n(0) = \dfrac{1}{2}$ منه المنحنيات C_n تشمل النقطة $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

3) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، المنحنى C_n يقطع المستقيم ذو المعادلة: $y = 2$ في نقطة وحيدة I_n:

لدينا: $f_n(x) = 2$ معناه: $\dfrac{4e^{nx}}{e^{nx}+7} = 2$ أي: $4e^{nx} = 2(e^{nx}+7)$ منه: $x = \dfrac{\ln 7}{n}$

اذن: $I_n\left(\dfrac{\ln 7}{n};2\right)$

4) كتابة معادلة لـ T_n مماس المنحنى C_n في النقطة I_n:

$$T_n : y = f_n'\left(\frac{\ln 7}{n}\right)\left(x - \frac{\ln 7}{n}\right) + f_n\left(\frac{\ln 7}{n}\right)$$
$$y = nx - \ln 7 + 2$$