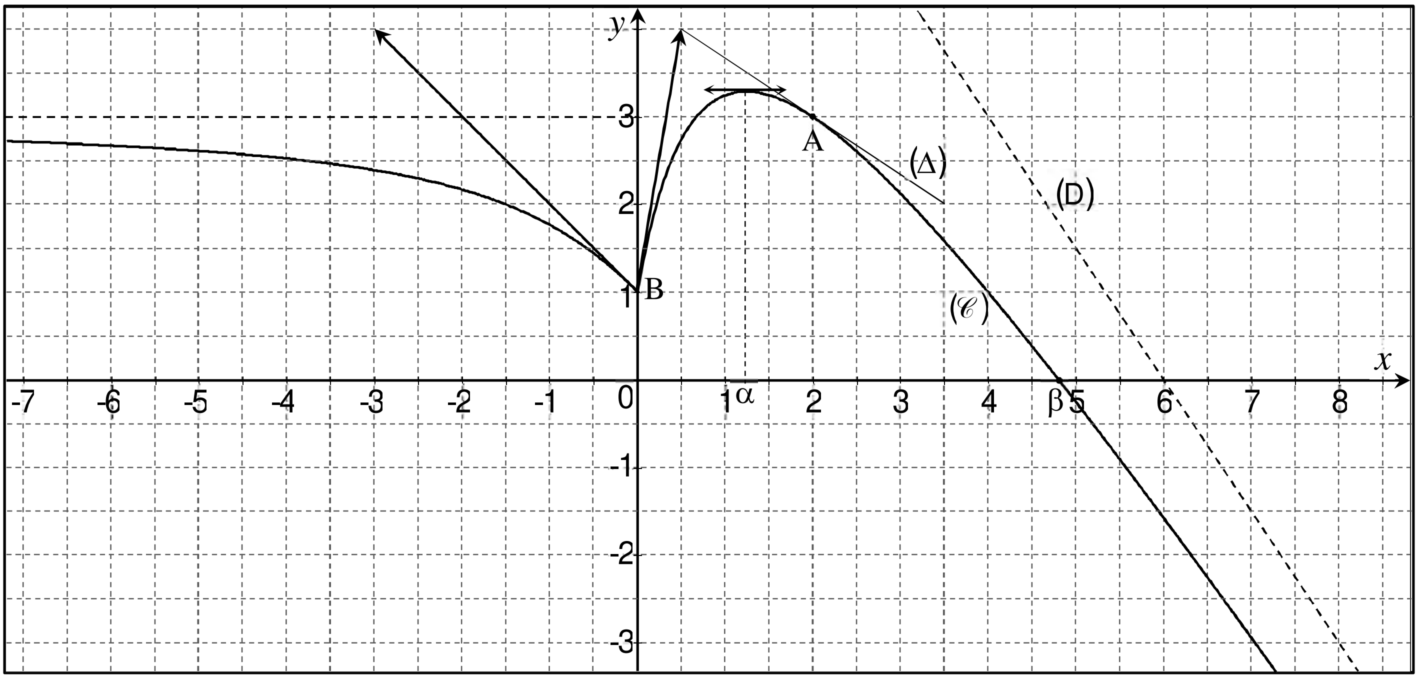
فرض الفصل الأول

تمرين 1 (10 نقاط)

في الشّكل المرفق: التمثيل البياني $(\mathscr{C})$ للدالة f المعرّفة والمستمرة على $\mathbb{R}$. (D) المستقيم المقارب المائل لـ$(\mathscr{C})$ في جوار $+\infty$، والمستقيم الذي معادلته $y=3$ مقارب لـ$(\mathscr{C})$ في جوار $-\infty$، (Δ) هو المماس لـ$(\mathscr{C})$ عند النقطة $A(2\,;3)$، كما يوجد نصفي مماسين عند النقطة $B(0\,;1)$، ومماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة α.



1) اكتب معادلة المستقيم المقارب المائل (D)، ومعادلة المماس (Δ).

2) عيّن النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\sqrt{f(x)+1}}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\dfrac{3}{2}x\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x)$.

3) عيّن النهايات التالية: $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\dfrac{f(x)-1}{x}$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{f(x)-1}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ و $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(-x+4)-3}{x-2}$.

4) بيّن أنّ الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند النقطة B. ماذا نسمي النقطة B ؟

5) أدرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f.

6) عيّن القيمة المقرّبة للعدد $f(2{,}001)$ ، باستعمال التقريب التآلفي للدالة f.

7) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β يطلب إعطاء حصرا له سعته $0{,}5$ ، ثم ادرس إشارة $f(x)$.

8) عيّن قيم الوسيط الحقيقي m ، حتى تقبل المعادلة $f(x)=m+1$ ثلاثة حلول متمايزة.

9) g الدالة العددية المعرّفة بـ: $g(x)=ax+b-\sqrt{x^2+c}$ ، حيث a ، b و c ثلاثة أعداد حقيقية.

أ) عيّن قيم العدد الحقيقي c حتى تكون الدالة g معرّفة على $\mathbb{R}$.

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ، من أجل كل حالة مما يلي: $a<0$ ، $a=1$ و $a>1$.

ج) إذا علمت أنّ $f(x)=g(x)$ على المجال $]-\infty\,;0]$ ، وبالاستعانة بقيم $f(0)$ ، $f'_g(0)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c.

تمرين 2 (10 نقاط)

I - g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1;3\}$ بـ: $g(x)=a+\dfrac{b}{x^2-2x-3}$ ، حيث a و b عددين حقيقيين.

1) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;3\}$ ، فإنّ: $g'(x)=\dfrac{-2b(x-1)}{(x^2-2x-3)^2}$.

2) عيّن العددين الحقيقيين a و b، بحيث المنحني الممثل للدالة g في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ يقبل عند النقطة $A(5;-4)$ مماسا موازيا للمستقيم الذي معادلته $2x-3y+1=0$.

II - f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1;3\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{-3x^2+6x-3}{x^2-2x-3}$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.(وحدة الطول $1cm$)

1) احسب النهايات عند حدود مجالات تعريف الدالة f.

2) اكتب معادلة لكل من المستقيمات المقاربة للمنحني $(\mathscr{C})$.

3) بيّن أنّ: من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;3\}$، $f'(x)=\dfrac{24x-24}{(x^2-2x-3)^2}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

4) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم $(\mathscr{D})$ الذي معادلته $y=1$ ، مع تحديد نقاط تقاطعهما.

5) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة التي فاصلتها $x_0=-3$.

6) أثبت أنّ المستقيم ذي المعادلة $x=1$ محور تناظر للمنحني $(\mathscr{C})$.

7) احسب $f(-2)$ و $f(0)$ ، ثم ارسم المستقيمات المقاربة، المماس (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$.

8) m وسيط حقيقي. استعمل $(\mathscr{C})$ لتعيين عدد وإشارة حلول المعادلة $(m+3)x^2-2(m+3)x-3(m-1)=0$.

III - h الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1;3\}$ بـ: $h(x)=\dfrac{6x-3}{x^2-2x-3}$.

ليكن $(\mathscr{C}')$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أنّ الدالة h متناقصة تماما على $\mathbb{R}-\{-1;3\}$.

2) بيّن أنّه يوجد مماسا مشتركا بين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ يطلب تعيين معادلة له.

بالتّوفيق

تصحيح فرض الفصل الأول 2022م

"عبد المطلب"

تمرين 1:

1) $(D): y = ax + b$ يشمل $C(6;0)$ و $D(4;3)$

بمعنى: $0 = 6a + b$ و $3 = 4a + b$

ومنه: $(D): y = -\frac{3}{2}x + 9$

$(\Delta): y = ax + b$ يشمل $A(2;3)$ و $E(\frac{1}{2};4)$

بمعنى: $3 = 2a + b$ و $4 = 0,5a + b$

ومنه: $(\Delta): y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$

2) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{\sqrt{f(x)+1}} = \frac{1}{\sqrt{3+1}} = \frac{1}{2}$$

بما أن: $\lim_{x\to +\infty}\left(f(x) + \frac{3}{2}x - 9\right) = 0$ لأن (D) مستقيم مقارب مائل، إذن $\lim_{x\to +\infty}\left(f(x) + \frac{3}{2}x\right) = 9$

$$\lim_{x\to +\infty}(f(x)+x) = \lim_{x\to +\infty}\left(f(x) + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x\right) = 9 - \frac{1}{2}\lim_{x\to +\infty} x = -\infty$$

3) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-1}{x} = f'_g(0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-1}{-3-0} = -1$$

(معامل توجيه نصف المماس عند 0 من اليسار)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-1}{x} = f'_d(0) = \frac{4-1}{0,5-0} = 6$$

(معامل توجيه نصف المماس عند 0 من اليمين)

$$\lim_{x\to \alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = f'(\alpha) = 0$$

(المماس يوازي حامل محور الفواصل)

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ نضع: $h(x) = f(-x+4)$

$h(2) = f(2) = 3$ و $h'(x) = -f'(-x+4)$

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(-x+4)-3}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} = h'(2) = \frac{2}{3}$$

4) $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ ومنه f غير قابلة للاشتقاق عند 0. B تسمى نقطة زاوية.

5) إشارة $f'(x)$:

لديا: $f'(\alpha) = 0$، لأن المماس يوازي (Ox).

ومنه:

x		0		α	
$f'(x)$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

6) لما يكون x قريبا من 2:

(Δ): $f(x) \simeq f'(2)(x-2) + f(2) \simeq -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$

$$f(2,001) \simeq -\frac{2}{3}(2,001) + \frac{13}{3} \simeq 2,999$$

7) f مستمرة ومتناقصة تماما على $[4,5\,;5]$، و $f(5) < 0$ و $f(4,5) > 0$، ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β.

إشارة $f(x)$:

x		β	
$f(x)$	$+$	0	$-$

8) $1 < m+1 < 3$ ومنه $0 < m < 2$

9) أ) حتى تكون g معرفة على $\mathbb{R}$ يجب: $c \geq 0$

$D_g = \mathbb{R}$

ب) $a < 0$: $\lim_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$

$a = 1$:

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(x + b - \sqrt{x^2+c}\right)$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2+c})(x + \sqrt{x^2+c})}{x + \sqrt{x^2+c}} + b$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{-c}{x+\sqrt{x^2+c}} + b\right) = b$$

$a > 1$:

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(ax + b - \sqrt{x^2+c}\right)$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left[x\underbrace{\left(a - \sqrt{1+\frac{c}{x^2}}\right)}_{>0} + b\right] = +\infty$$

جـ) $f'(x) = a - \frac{x}{\sqrt{x^2+c}}$ و $f'_g(0) = -1$

ومنه: $a = -1$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(-x + b - \sqrt{x^2+c}\right)$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{(-\sqrt{x^2+c} - x)(-\sqrt{x^2+c} + x)}{-\sqrt{x^2+c} + x} + b\right)$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{c}{-\sqrt{x^2+c} + x} + b\right) = 3$$ ومنه: $b = 3$

$f(0) = b - \sqrt{c} = 1$ ومنه

$g(x) = -x + 3 + \sqrt{x^2+4}$