الفرض الأول للفصل الأول

في مادة الرياضيات

ملاحظة: تؤخذ بعين الاعتبار، الإجابات الدقيقة والواضحة، كما يمنع منعا باتا استعمال القلم الأحمر

التمرين

I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2-xe^{1-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

[03.00 ن] ❶ أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا، ثم احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

[03.00 ن] ب- ادرس تغيرات الدالة f ثمّ شكل جدول تغيراتها

[01.50 ن] ❷ أ- بيّن أنّ لـ (C_f) نقطة إنعطاف Ω يطلب تعيين إحداثييها

[01.00 ن] ب- اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة Ω

[01.50 ن] ج- اكتب معادلة المماس (T') لـ (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور التراتيب، ثم تحقق أنّ $(T)\perp(T')$

[02.50 ن] ❸ احسب $f(-1)$، ثم أنشئ (C_f)

[02.00 ن] ❹ ناقشا بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلولة المعادلة $\ln f(x)-\ln f(m)=0$

II) f_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_n(x)=2-x^ne^{1-x}$

(حيث: $n\in\mathbb{N}$ ، مع: $n\geq 2$)، و (C_n) تمثيلها البياني في المستوي السابق

[02.00 ن] ❶ بيّن أنّ جميع المنحنيات (C_n) تمّر من نقطتين ثابتتين يُطلب تعيينهما

[01.50 ن] ❷ احسب نهايتي الدالة f_n عند $+\infty$ و $-\infty$ (ناقش حسب شفعية n)

[02.00 ن] ❸ احسب $f_n'(x)$، ثمّ حدّد حسب شفعية n اتجاه تغير الدالة f_n وشكل جدول تغيراتها

"ومن يتهيب صعود الجبال... يعش أبد الدهر بين الحفر"

بالتوفيق للجميـــــــــع

DZPEN.COM | منـــصـــة الـقـلـم الـجـزائـــري

(I

❶ أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2 - xe^{-x}e^{1}) = \boxed{2}$

لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} (-xe^{-x}) = 0$

• التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 2$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

ب- دراسة تغيرات الدالة f ثمّ تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا من أجل كل $x \in D_f$:

$$f'(x) = -e^{1-x} + xe^{1-x} = (x-1)e^{1-x}$$

لدينا: $e^{1-x} > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x-1)$:

لدينا: $x - 1 = 0$ ومنه: $x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ 2

❷ أ- تبيين أنّ لـ (C_f) نقطة إنعطاف Ω :

لدينا f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$f''(x) = e^{1-x} - (x-1)e^{1-x} = (2-x)e^{1-x}$$

لدينا: $e^{1-x} > 0$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة $(2-x)$:

لدينا: $2 - x = 0$ ومنه: $x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

لدينا: المشتقة الثانية تنعدم وتغير إشارتها لما $x = 2$

ومنه: (C_f) يقبل نقطة انعطاف $\Omega\left(2; \frac{2e-2}{e}\right)$

ب- كتابة معادلة (T) :

$$(T): y = f'(2)(x-2) + f(2) = \boxed{e^{-1}x - 4e^{-1} + 2}$$

ج- كتابة معادلة (T') :

$$(T'): y = f'(0)(x-0) + f(0) = \boxed{-ex + 2}$$

- التحقق أنّ $(T) \perp (T')$:

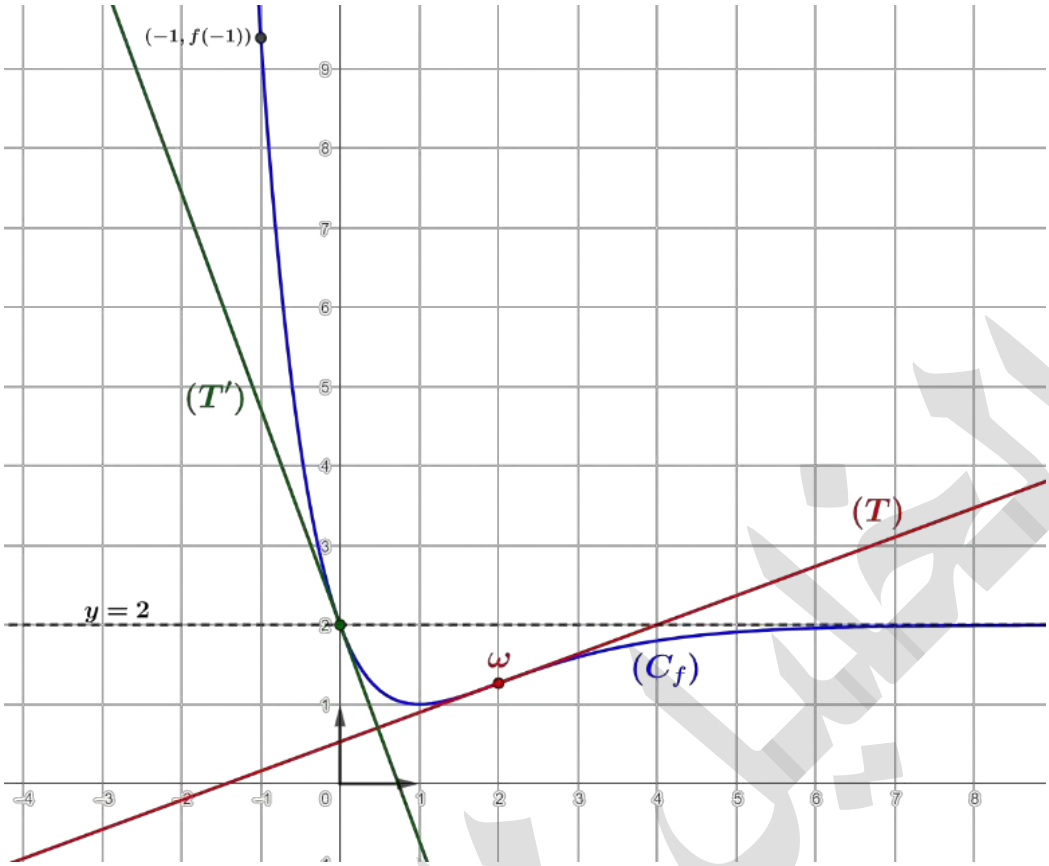
مستقيمان متعامدان معناه ضرب معاملي توجيههما يساوي -1

لدينا: $a_{(T)} \times a_{(T')} = -e \times e^{-1} = -1$ إذن (T) و (T') متعامدان

❸ حساب $f(-1)$، وانشاء (C_f):

لدينا: $f(-1) = 2 + e^2 \approx 9.38$

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري



❹ المناقشة البيانية لعدد واشارة حلولة المعادلة $\ln(f(x)) - \ln(f(m)) = 0$:

لدينا: $\ln(f(x)) - \ln(f(m)) = 0 \ldots (*)$

ومنه: $\ln(f(x)) = \ln(f(m))$

ومنه: $\boxed{f(x) = f(m)}$

حلول المعادلة $(*)$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y = f(m)$ حيث $m \in \mathbb{R}$

لما $m = 1$ المعادلة تقبل حل مضاعف موجب تماما

لما $m \in]0;1[\cup]1;+\infty[$ المعادلة تقبل حلان موجبان تماما

لما $m = 0$ المعادلة تقبل حل معدوم

لما $m =]-\infty;0[$ المعادلة تقبل حل وحيد سالب تماما

II)

❶ تبيين أن جميع المنحنيات (C_n) تمّر من نقطتين ثابتتين:

لدينا: $f_n(x) - f_{n+1}(x) = 0$

معناه: $2 - x^n e^{1-x} - 2 + x^{n+1}e^{1-x} = 0$

ومنه: $x^n e^{1-x}(-1 + x) = 0$

ومنه: $-1 + x = 0$ أو $x^n = 0$ لأنّ $e^{1-x} \neq 0$

ومنه: جميع المنحنيات (C_n) تمّر من نقطتين ثابتتين هما $A(0;f(0))$ و $B(1;f(1))$

أي: من النقطتين $A(0;2)$ و $B(1;1)$

❷ حساب نهايتي الدالة f_n عند $+\infty$ و $-\infty$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2 - e\dfrac{x^n}{e^x}\right) = \boxed{2}$ فـ

لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^n}{e^x}\right) = 0$

لمّا: $n = 2k + 1$ حيث: $k \in \mathbb{N}$:

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري