



أكتوبر 2023

المستوى: الثالثة علوم تجريبية

المدة : ساعتان

الفرض الأول في مادة الرياضيات

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي :

$$g(x) = x^3 + 6x + 12$$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

(2) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث : $-1,48 < \alpha < -1,47$

ثمّ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} بـ :

$$f(x) = \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2}$$

ليكن (C_f) المنحنى الممثل لها في مستوٍ منسوب إلى معلم متعامد و متجانس (o, \vec{i}, \vec{j})

1. أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{x g(x)}{(x^2 + 2)^2}$.

ج) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

2. أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

ب) ادرس وضعيّة (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

3. بيّن أنّ : $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ثمّ استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$.

4. ارسم كلاً من (Δ) و (C_f) .

5. ناقش بيانياً و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x) = m$

العلامة

الإجابة النموذجية

I. لدينا : $g(x) = x^3 + 6x + 12$

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و $g'(x) = 3x^2 + 6$.
من أجل كل x من \mathbb{R} $g'(x) > 0$ و منه الدالة g متزايدة تماما على \mathbb{R} .

(2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ حلاً وحيداً α :

بما أن الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على \mathbb{R} و منه على $[-1,48 ; -1,47]$ ولدينا : $g(-1,48) =$

$$g(-1,47) = 0,0035$$

$$\text{و منه } g(-1,48) \times g(-1,47) < 0$$

إذن و حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α .

$$\text{حيث } -1.48 < \alpha < -1.47$$

➤ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

II. لدينا : $f(x) = \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2}$

(1) أ- حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3 - 6}{x^2 + 2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 - 6}{x^2 + 2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x] = +\infty$$

ب) حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x^2 + 2) - (2x)(x^3 - 6)}{(x^2 + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^4 + 6x^2 - 2x^4 + 12x}{(x^2 + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(x^3 + 6x + 12)}{(x^2 + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2}$$

ج) جدول تغيّرات $f(x)$:

ومنه f
متزايدة
تماما

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
x	-	0	+	+
$f(x)$	-	0	+	+
$f'(x)$	+	0	-	+

على كل من $[-\infty; \alpha]$ و $[\alpha; +\infty]$
و f' متناقصة تماما على $[\alpha; 0]$

(ج) جدول تغيّرات $f(x)$:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	-3	$+\infty$

(2) أ. نبين أنّ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ مقارب مائل :

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 6}{x^2 + 2} - x \right) \\ &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 6 - x^3 - 2x}{x^2 + 2} \right) \\ &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{-6 - 2x}{x^2 + 2} \right) \\ &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2x}{x^2} \right) \\ &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{x} \right) = 0 \end{aligned}$$

ومنه المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

(ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

ندرس إشارة الفرق : $(f(x) - x)$ على \mathbb{R} :

$$f(x) - x = \frac{-2x - 6}{x^2 + 2}$$

لدينا : $(x^2 + 2) > 0$ و منه الإشارة $f(x) - x$ هي إشارة $-2(x + 3)$:

$-2x - 6 = 0$ و منه $-2x = 6$ أي $x = -3$ و منه إشارة $(f(x) - y)$:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$(f(x) - x)$		0	
	$+$		$-$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$(f(x) - x)$	$+$		$-$
الوضعية	$c(f)$ يقع أعلى (Δ)	(Δ) $c(f)$ يقطع في $A(-3, -3)$	$c(f)$ يقع تحت (Δ)

(3) تبيين أن : $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$

يكفي أن نبرهن أن : $f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = 0$

$$f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = \frac{\alpha^3 - 6}{\alpha^2 + 2} - \frac{3}{2}\alpha = \frac{2\alpha^3 - 12 - 3\alpha^3 - 6\alpha}{\alpha^2 + 2}$$

$$= \frac{-(\alpha^3 + 6\alpha + 12)}{\alpha^2 + 2} = -\frac{g(\alpha)}{\alpha^2 + 2} = -\frac{0}{\alpha^2 + 2} = 0$$

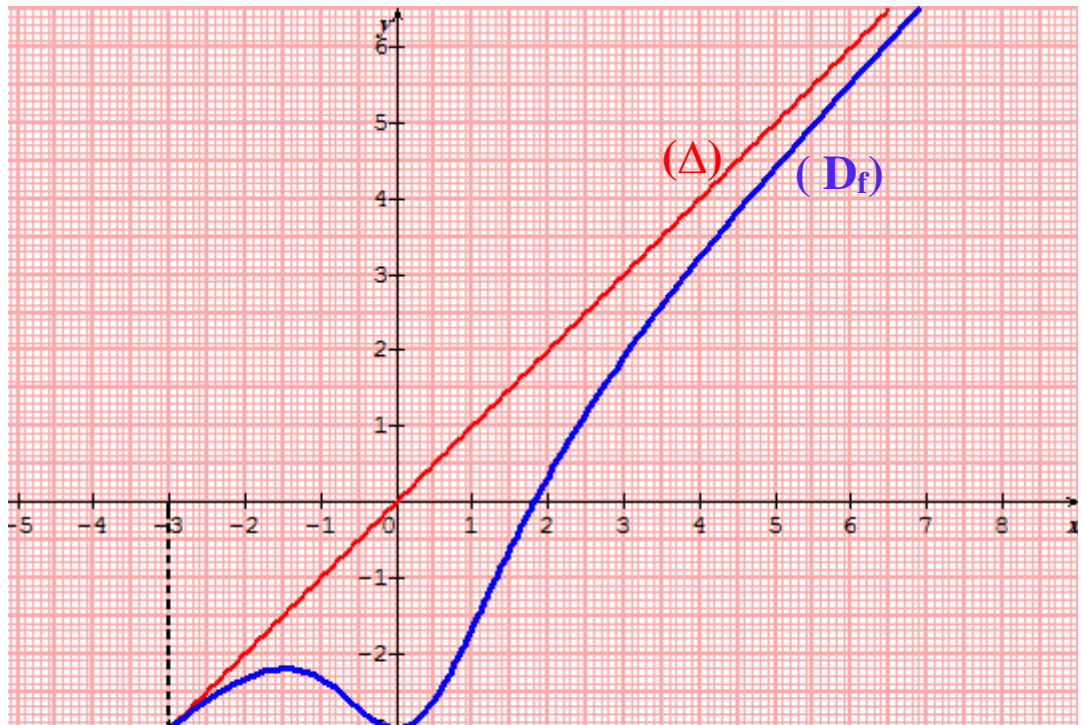
إذن : $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$

➤ استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$:

لدينا : $-1,48 < \alpha < -1,47$ ولدينا $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$

ومنه : $\frac{3}{2}(-1,48) < \frac{3}{2}\alpha < \frac{3}{2}(-1,47)$ أي : $-2,22 < f(\alpha) < -2,21$

(4) إنشاء المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) :



(5) المناقشة البيانية :

- لَمَّا $m \in]-\infty; -3[$ المعادلة لها حل واحد سالب .
- لَمَّا $m = -3$ المعادلة تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر سالب.
- لَمَّا $m \in]-3; f(\alpha)[$ المعادلة تقبل 3 حلول ، واحد موجب و اثنان سالبان.
- لَمَّا $m = f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين واحد موجب و الآخر سالب.
- لَمَّا $m \in]f(\alpha); +\infty[$ للمعادلة حل موجب .