المستوى:الثالثة علوم تجريبية   فيفري 2022

فرض الفصل الثاني في مادة الرياضيات   المدة : ساعتين.

التمرين 1

في كل مما يلي توجد اجابة صحيحة واحدة ، عينها مع التبرير:

أ) مجموعة حلول المتراجحة : $ln(x+2) + ln(x-1) \leq 2\, ln\, 2$

1) $]-2\,;1]$; 2) $]1\,;2]$; 3) $[-3\,;2]$

ب) نعتبر المعادلة التفاضلية : $3y - y' = 6 \quad ...(E)$

الحل الخاص للمعادلة (E) الذي يحقق : $f(-1)=0$ هو :

1) $f(x) = -2e^{3(x+1)} + 2$; 2) $f(x) = -2e^{3x+1} + 2$;

3) $f(x) = 3e^{2(x-1)} - 2$

ج) f دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على المجال $]0\,;+\infty[$ حيث :

$f(x) = (ln\,x)^2 + 1 - \frac{2}{ln\,x}$ ، الدالة المشتقة للدالة f معرفة ب:

1) $f'(x) = 2\left(\frac{ln(x^3+1)}{x(ln\,x)^2}\right)$; 2) $f'(x) = 2\left(\frac{(ln\,x)^3+1}{x(ln\,x)^2}\right)$;

3) $f'(x) = 2\left(\frac{(ln\,x+1)^3}{x(ln\,x)^2}\right)$

التمرين 2

I) لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2\,ln\,x$

و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.5 < \alpha < 2$.

3) استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{ln\,x}{x^2+1}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) أ) احسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف ، فسر النتائج هندسيا.

ب) بين انه من اجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x^2+1)^2}$

ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بين أن $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$ و استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

4) ارسم (T) و (C_f).

5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + m$$

III) لتكن الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x) = \frac{|\ln x|}{x^2+1}$

اشرح كيف يمكن رسم (C_h) منحنى الدالة h اعتمادا على (C_f)

بالتوفيق.

<u>التصحيح النموذجي</u>

رقم التمرين	الحل	العلامة
التمرين 1	**أ)** مجموعة حلول المتراجحة : $ln(x+2) + ln(x-1) \leq 2\,ln\,2$ **3)** $[-3\,;2]$ **ب)** نعتبر المعادلة التفاضلية : $3y - y' = 6 \quad ...(E)$ الحل الخاص للمعادلة (E) الذي يحقق : $f(-1)=0$ هو : **1)** $f(x) = -2e^{3(x+1)} + 2$ **ج)** f دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على المجال $]0\,;+\infty[$ حيث : $f(x) = (ln\,x)^2 + 1 - \frac{2}{ln\,x}$ ، الدالة المشتقة للدالة f معرفة ب: **2)** $f'(x) = 2\left(\frac{(ln\,x)^3+1}{x(ln\,x)^2}\right)$	

I(1) تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

النهايات

$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = 1$ لأنّ $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} 2x^2 \ln x = 0$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} 1 + x^2 = 1$.

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(\frac{1}{x^2} + 1 - 2\ln x\right) = -\infty$$

الدالة المشتقة

$$g'(x) = 2x - 2\left(2x \ln x + \frac{1}{x}x^2\right) = 2x - 4x \ln x - 2x = -4x \ln x$$

إشارة الدالة المشتقة

من أجل $]0;1[$ ، $x \in$ ، $\ln x < 0$ ومنه $g'(x) > 0$

ومن أجل $]1;+\infty[$ ، $x \in$ ، $\ln x > 0$ ومنه $g'(x) < 0$

اتجاه التغير

بالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ و متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$

جدول التغيرات

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖		0		
$g(x)$	‖ 1	↗	2	↘	$-\infty$

2) نبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيد ا α حيث $1.5 < \alpha < 2$.

مبرهنة القيم المتوسطة

3) استنتاج اشارة $g(x)$ حسب قيم x .

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	+	0	-	

II) 1) أ) حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف و تفسير النتائج هندسيا.

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x^2+1} = 0$

تفسير النتائج هندسيا.

لدينا $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$

$\lim f(x) = 0$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 0$ (محور الفواصل) بجوار $+\infty$.

ب) نبين انه من اجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x^2+1)^2}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $x(x^2+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$.

إذن الدّالة f متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

جدول التغيرات

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ 0

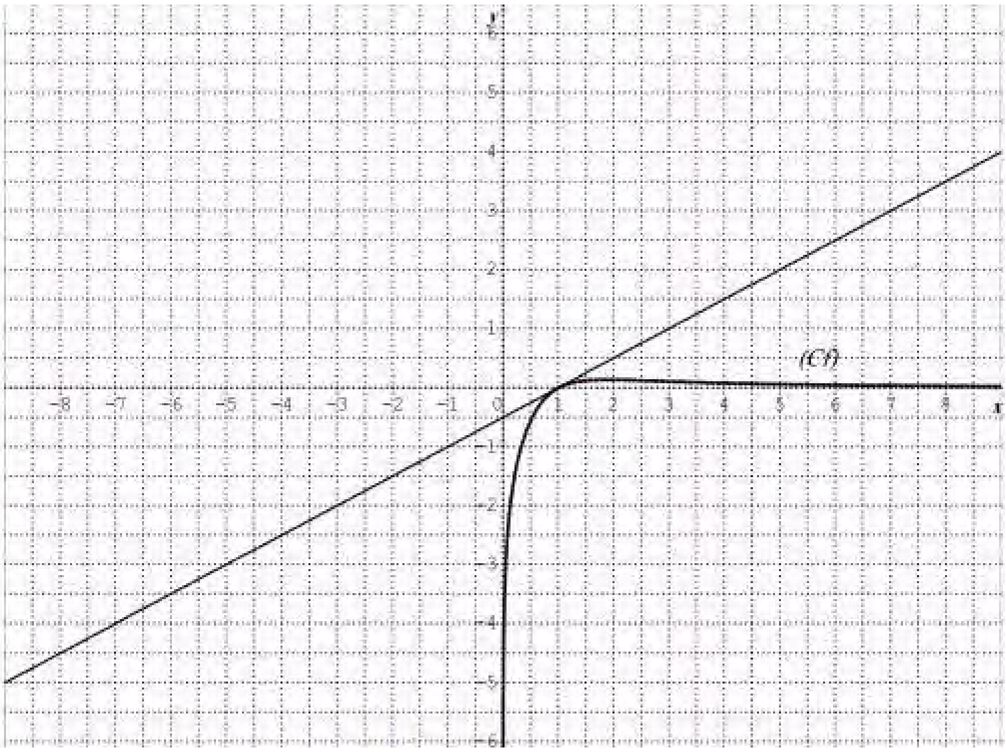
2) نبين أن $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$

حصر للعدد $f(\alpha)$. $0{,}12 < f(\alpha) < 0{,}23$

3) معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$ ومنه $y = \frac{1}{2}(x-1)$

4) رسم (T) و (C_f).



5. المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي

m، عدد حلول المعادلة: $f(x)=\frac{1}{2}x+m$.

إذا كان $m<-\frac{1}{2}$ فإن المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $m=-\frac{1}{2}$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا مضاعفا.

إذا كان $m>-\frac{1}{2}$ فإنّ المعادلة ليس لها حلول.

III) الشرح كيف يمكن رسم (C_h) منحنى الدالة h اعتمادا على (C_f)

$$\begin{cases} h(x)=f(x); x\in[1;+\infty[\\ h(x)=-f(x); x\in]0;1] \end{cases}.$$

على المجال $[1\ ;+\infty[$ يكون (C_h) منطبق على (C_f)

على المجال $]0\ ;1]$ يكون (C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل.