الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) المستوى: 3 ثانوي "ع.ت" المادة: رياضيات	فرض الفصل الثالث	الموسم الدراسي: 2025/2024م المدة: (2سا و 30د) إعداد: عبد المطلب

تمرين 1 (06نقاط)

في المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقط A ، B و C من هذا المستوى التي لاحقاتها: $z_A=2-2i$ ، $z_B=1+3i$ و $z_C=-3-3i$.

1) اكتب على الشكل الجبري العدد $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ ، ثم بيّن أنّ: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، واستنتج طبيعة المثلث ABC.

2) بيّن أنّ: $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i=\left(\frac{z_A+z_B+z_C+2}{2\sqrt{2}}\right)^{2025}$.

3) أ) عيّن z_D لاحقة النقطة D بحيث: $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=2$ ، ثم استنتج أنّ النقط A ، B و D في استقامية.

ب) لتكن النقطة E نظيرة النقطة C بالنسبة للنقطة A. بيّن أنّ لاحقة النقطة E هي $z_E=7-i$.

4) أ) ماذا يمكن قوله عن القطعتين [CE] و [BD]؟ استنتج طبيعة الرباعي BCDE ثم مثّله.

ب) عيّن وأنشئ المجموعة Γ للنقط M من المستوى التي تحقّق: $\left\|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$.

تمرين 2 (05نقاط)

يحتوي كيس على 4 كريات سوداء تحمل الأرقام التالية: 2،0،2،4 و 4 كريات بيضاء تحمل الأرقام التالية: 1،4،4،5.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد من هذا الكيس كريتين. كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس.

1) احسب p_1 احتمال أن يكون رقمي الكريتين المسحوبتين زوجيين.

2) بيّن أنّ احتمال أن تكون القيمة المطلقة للفرق بين رقمي الكريتين المسحوبتين معدوما هو $p_2=\frac{1}{7}$.

3) نُعرّف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب القيمة المطلقة للفرق بين الرقمين المحصل عليهما.

برّر أنّ قيم X هي: $\{0;1;2;3;4;5\}$ ، ثم عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

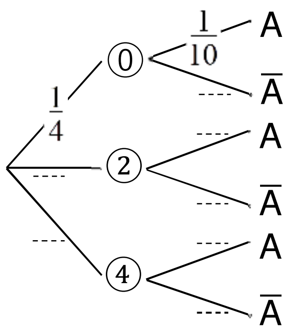
4) نضع الآن الكريات السوداء في الكيس U_1 والكريات البيضاء في الكيس U_2. في التجربة الأولى نسحب عشوائيا كرية واحدة من الكيس U_1 نضعها في الكيس U_2 ثم نسحب من هذا الأخير عشوائيا وفي آن واحد كريتين. وفي التجربة الثانية نسحب عشوائيا كرية واحدة من الكيس U_2 نضعها في الكيس U_1 ثم نسحب من هذا الأخير عشوائيا وفي آن واحد كريتين.

نعتبر الحادثة A: الكريتان المسحوبتان تحملان نفس الرقم.

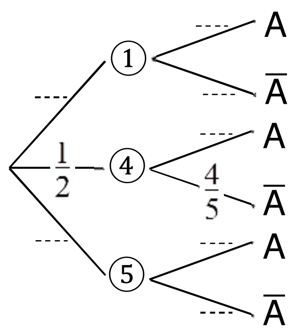
أ) انقل ثم أكمل شجرتي الاحتمالات المقابلة التي تنمذج هذه العملية من أجل كل تجربة.

ب) احسب $p(\overline{A})$ احتمال سحب كريتان تحملان رقمين مختلفين من أجل كل تجربة.

(تُعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)



تجربة1



تجربة2

تمرين 3 (09نقاط)

f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0\,;e^{\frac{5}{2}}]$ بـ: $f(x)=2\ln x-(\ln x)^2$.

وليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث وحدة الطول $1cm$.

1) بيّن أنّ المستقيم الذي معادلته $x=0$ مقارب للمنحني $(\mathscr{C})$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0\,;e^{\frac{5}{2}}]$: $f'(x)=\dfrac{2-2\ln x}{x}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات f .

ب) ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=-2$ ؟ لا يطلب حساب الحلول.

ج) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

3) أ) اكتب معادلة المماس (T) للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة التي فاصلتها 1.

ب) حل على المجال $]0\,;e^{\frac{5}{2}}]$ المعادلة $f(x)=0$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا.

ج) أنشئ المماس (T) والمنحني $(\mathscr{C})$.

4) نعتبر التكاملين التاليين: $I=\int_e^{e^2}\ln x\,dx$ و $J=\int_e^{e^2}(\ln x)^2\,dx$

أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بيّن أنّ: $I=e^2$ و $J=2e^2-e$.

ب) احسب مساحة الحيّز $\mathcal{A}$ المحدّد بـ$(\mathscr{C})$، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x=e$ و $x=e^2$.

5) h الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0\,;e^{\frac{5}{2}}]$ بـ: $h(x)=|f(x)|$. $(\mathscr{C}_h)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) اكتب h دون رمز القيمة المطلقة، ثم ارسم بيانها مع الشرح.

ب) m وسيط حقيقي موجب. عيّن قيم m حتى تقبل المعادلة $(f(x))^2=m$ أربعة حلول متمايزة.

6) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $u_0=e$ و $u_{n+1}=[f(u_n)]^2+1$.

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le e$.

ب) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}\le u_n$. استنتج أنّ (u_n) متقاربة نحو 1.

بالتوفيق

تصحيح فرض الفصل الثالث 2025م

"عبد المطلب"

تمرين 1:

1) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-5-i}{-1+5i} = \frac{i(5i-1)}{-1+5i} = i$

$|i| = 1$ و $\cos\theta = 0$ و $\sin\theta = 1$ منه $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB} = 1$

$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2}$

ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين

2) $\frac{z_A + z_B + z_C + 2}{2\sqrt{2}} = \frac{2 - 2i}{2\sqrt{2}} = 1 e^{i(-\frac{\pi}{4})}$

$\left[e^{i(-\frac{\pi}{4})}\right]^{2025} = e^{i(-\frac{2025\pi}{4})} = e^{i(-\frac{\overset{2k\pi}{\cancel{2024\pi}}}{4} - \frac{\pi}{4})}$

$\left(\frac{z_A + z_B + z_C + 2}{2\sqrt{2}}\right)^{2025} = e^{i(-\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$

3) أ) $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = 2$ ، $z_D = 2(z_A - z_B) + z_B = 3 - 7i$

$\arg(2) = 2k\pi$ أي $(\vec{BA}, \vec{BD}) = 2k\pi$

ومنه: A، B و D في استقامية. $(\vec{BD} = 2\vec{BA})$ أي

ب) $z_A = \frac{z_C + z_E}{2}$ ومنه: $z_E = 2z_A - z_C = 7 - i$

4) أ) $\frac{z_C + z_E}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} = z_A$: [BD] و [CE] (متناصفان)

سابقا: $(AB) \perp (AC)$ أي $[BD] \perp [CE]$ (متعامدتان)

و $AB = AC$ أي $[BD] = [CE]$ (متقايستان)

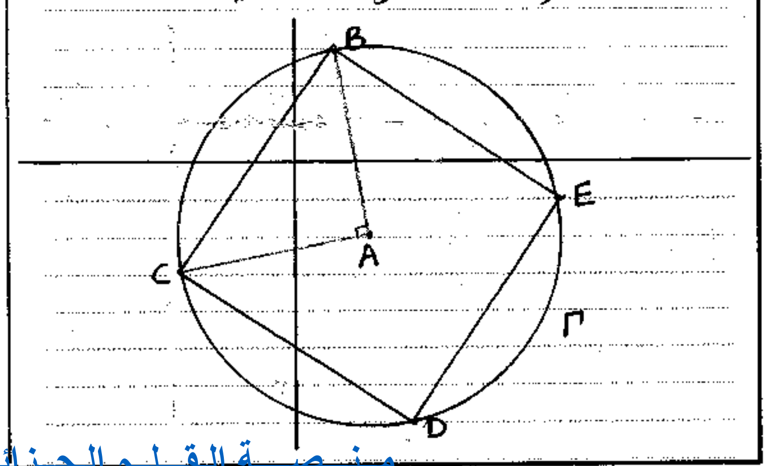
ومنه: BCDE مربع.

ب) $\|\vec{MC} + \vec{ME}\| = 2\|\vec{MA} - \vec{MB}\|$

$\|\vec{MA} + \vec{AC} + \vec{MA} + \vec{AE}\| = 2\|\vec{BM} + \vec{MA}\|$

$\|2\vec{MA} + \underbrace{\vec{AC} + \vec{AE}}_{\vec{0}}\| = 2\|\vec{BA}\|$

$AM = AB$ ، Γ هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها AB أي تشمل B.



تمرين 2:

1) $P_1 = \frac{C_6^2}{C_8^2} = \frac{15}{28}$ $(0, 2, 2, 4, 4, 4)$

2) $P_2 = \frac{C_2^2 + C_3^2}{C_8^2} = \frac{1}{7}$ $(2-2 = 4-4 = 0)$

3) $P(X=0) = P_2 = \frac{1}{7}$ $(2-2 = 4-4 = 0)$

$P(X=1) = \frac{C_1^1 \times C_3^1 + C_2^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_1^1}{C_8^2} = \frac{3}{14}$

$(5-4 = 2-1 = 1-0 = 1)$

$P(X=2) = \frac{C_3^1 \times C_2^1 + C_2^1 \times C_1^1}{C_8^2} = \frac{2}{7}$

$(4-2 = 2-0 = 2)$

$P(X=3) = \frac{C_1^1 \times C_2^1 + C_3^1 \times C_1^1}{C_8^2} = \frac{5}{28}$

$(5-2 = 4-1 = 3)$

$P(X=4) = \frac{C_1^1 \times C_1^1 + C_3^1 \times C_1^1}{C_8^2} = \frac{1}{7}$

$(5-1 = 4-0 = 4)$

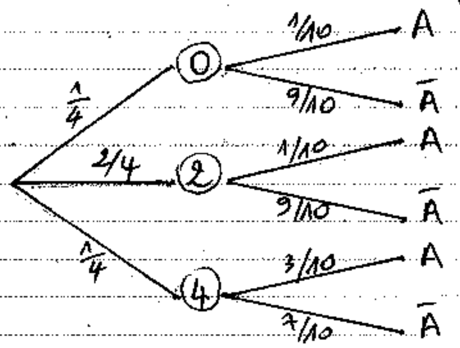
$P(X=5) = \frac{C_1^1 \times C_1^1}{C_8^2} = \frac{1}{28}$ $(5-0 = 5)$

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{28}$

$E(X) = \sum_{k=0}^{5} k\, P(X=k) = \frac{29}{14}$

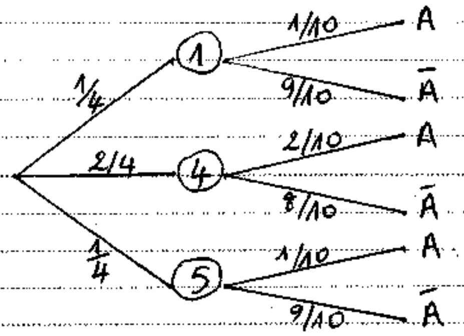
4) أ) و ب)

تجربة 1:



$P(\bar{A}) = \frac{1}{4} \times \frac{9}{10} + \frac{2}{4} \times \frac{9}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{7}{10} = \frac{17}{20}$

تجربة 2:



$P(\bar{A}) = \frac{1}{4} \times \frac{9}{10} + \frac{2}{4} \times \frac{8}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{9}{10} = \frac{17}{20}$

تمرين 3:

1) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(2\ln x - (\ln x)^2\right) = -\infty - \infty = -\infty$

$x=0$: مستقيم مقارب عمودي

2) أ) $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x}\ln x = \frac{2-2\ln x}{x}$

$2-2\ln x > 0$ لما $-\ln x > -1$

$\ln x < 1$ ومنه : $0<x<e$

لما $f'(x) \geq 0$: $0 < x \leq e$.

لما $f'(x) < 0$: $e < x \leq e^{5/2}$.

x	0		e		$e^{5/2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$

ب) لما $x \in [e, e^{5/2}]$ ، $f(x) = -2$ لا تقبل حلول

ولما $x \in]0;e[$ ، $f(x)=-2$ تقبل حلا وحيدا

لأن f مستمرة ومتزايدة تماما و $f(e)=1>0$

و $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ (مبرهنة القيم المتوسطة)

جـ) $f''(x) = \frac{-2-(2-2\ln x)}{x^2} = \frac{-4+2\ln x}{x^2}$

$f''(x)=0$ لما $\ln x = 2$ أي $x=e^2$

f'' تنعدم وتغير إشارتها $\quad - \; e^2 \; +$

النقطة هي $w(e^2; f(e^2))$ أي $w(e^2;0)$

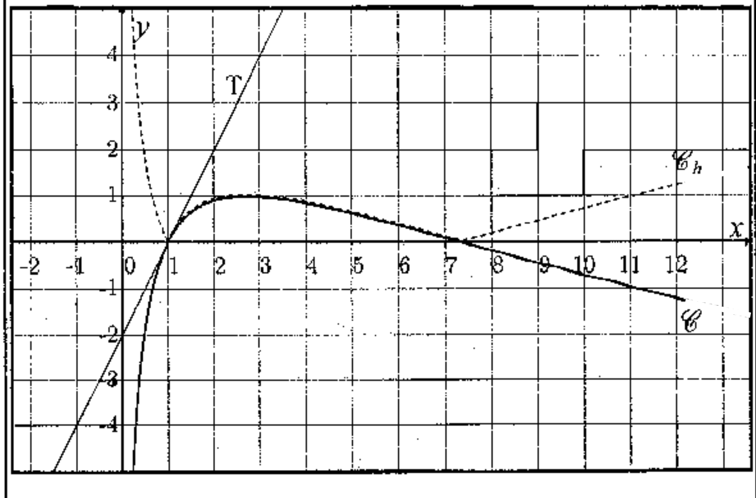
3) أ) $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2x-2$

ب) $f(x)=0$: $\ln x(2-\ln x) = 0$

$\ln x = 0$: $x=1$ و $\ln x = 2$: $x=e^2$

تمثل فاصلتي نقطتي تقاطع (C) مع (Ox) .

جـ) رسم (C) ، المماس (T) و المنحني (C_h) .



4) أ)

$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$

$I = [x\ln x]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} dx = [x\ln x - x]_e^{e^2} = e^2$

$\begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = \frac{2\ln x}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$

$J = [x(\ln x)^2]_e^{e^2} - 2\int_e^{e^2} \ln x \, dx$

$J = 4e^2 - e - 2I = 2e^2 - e$

ب) $A = \int_e^{e^2} f(x)\,dx = 2I - J = e \ u.a$

5) أ) إشارة $f(x)$: $\quad - \; 1 \; + \; e^2 \; -$

$h(x) = f(x)$: $f(x) \geq 0$ ، $x \in [1, e^2]$

(C_h) ينطبق (C) .

$h(x) = -f(x)$: $f(x) < 0$ ، $x \in]0,1[\cup]e^2, e^{5/2}]$

(C_h) يناظر (C) بالنسبة لـ (Ox) .

ب) $[f(x)]^2 = m$ يعني : $|f(x)| = \sqrt{m}$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_h) مع المستقيمات الأفقية $y=\sqrt{m}$

4 حلول متمايزة : $0 < \sqrt{m} < 1$ ومنه $0<m<1$

6) أ) $n=0$: $u_0 = e$ ، $1 \leq u_0 \leq e$ (محققة)

نفرض أن $1 \leq u_n \leq e$ من أجل n كيفي ونبرهن صحة : $1 \leq u_{n+1} \leq e$. لدينا : $1 \leq u_n \leq e$

$f(1) \leq f(u_n) \leq f(e)$ لأن f متزايدة على $[1,e]$

$0 \leq f(u_n) \leq 1$ ، $0 \leq [f(u_n)]^2 \leq 1$

$1 \leq [f(u_n)]^2 + 1 \leq 2 \leq e$ أي $1 \leq u_{n+1} \leq e$

ومنه : $1 \leq u_n \leq e$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

ب) نبرهن بالتراجع : $u_{n+1} \leq u_n$

$n=0$: $u_1 \leq u_0$ ، $u_0 = e$ و $u_1 = 2$ (محققة)

نفرض صحة $u_{n+1} \leq u_n$ من أجل n كيفي

ونبرهن صحة $u_{n+2} \leq u_{n+1}$. لدينا : $u_{n+1} \leq u_n$

$f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$ ؛ $[f(u_{n+1})]^2 \leq [f(u_n)]^2$

$[f(u_{n+1})]^2 + 1 \leq [f(u_n)]^2 + 1$.

$u_{n+2} \leq u_{n+1}$ ومنه : $u_{n+1} \leq u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بـ 1 فهي متقاربة

$1 \leq l \leq e$ ؛ $l = [f(l)]^2 + 1$ ؛ $[f(l)]^2 = l - 1$

لدينا : $f(l) = 0$ لما $l=1$ ومنه : $l=1$

عبد المطلب