

فرض

الفصل الثالث

تمرين 1 (06 نقاط)

كيس U_1 يحتوي على 19 كرية لا نفرق بينها عند اللمس، مرقمة من 1 إلى 19.

كيس U_2 يحتوي على $2n+1$ كرية لا نفرق بينها عند اللمس، مرقمة من 1 إلى $2n+1$. (n عدد طبيعي غير معدوم)

I- نسحب عشوائيا في آن واحد كرتين من الكيس U_1 .

(1) احسب P_1 احتمال سحب كرتين تحملان رقمين زوجيين.

(2) احسب P_2 احتمال سحب كرتين تحملان رقمين من مضاعفات 3.

(3) احسب P_3 احتمال سحب كرتين تحملان رقمين زوجيين ومن مضاعفات 3.

(4) احسب P_4 احتمال سحب كرتين تحملان رقمين زوجيين أو من مضاعفات 3.

(5) احسب P_5 احتمال سحب كرتين تحملان رقمين من مضاعفات 3 إذا علمت أنّهما زوجيان.

(6) نقترح اللعبة التالية عند سحب كرتين تحملان رقمين زوجيين يربح اللاعب 5 نقاط، وعند سحب كرتين تحملان

رقمين فرديين يربح اللاعب α نقطة، حيث α عدد طبيعي، أما عند سحب كرتين تحملان رقمين أحدهما زوجي والآخر

فردى فيخسر اللاعب 6 نقاط. نعرّف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب ربح أو خسارة اللاعب.

(أ) عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم بيّن أنّ الأمل الرياضي لـ X هو $E(X) = \frac{5\alpha - 40}{19}$.

(ب) أوجد قيمة العدد الطبيعي α حتى تكون اللعبة عادلة (الأمل الرياضي معدوم).

II- يُطلب الآن من اللاعب الإجابة على سؤال فيه ثلاث إجابات مختلفة، واحدة فقط صحيحة. عندما تكون الإجابة

صحيحة يسحب من الكيس U_1 كرتين في آن واحد، وعندما تكون خاطئة يسحب من الكيس U_2 كرتين في آن واحد

نعتبر الأحداث: A: سحب كرتين تحملان رقمين زوجيين، B: سحب كرتين تحملان

رقمين فرديين، و C: سحب كرتين تحملان رقمين أحدهما زوجي والآخر فردي.

(1) أنقل ثم أكمل شجرة الاحتمالات المقابلة التي تنمذج هذه الوضعية.

(2) علما أنّ الكرتين المسحوبتين تحملان رقمين زوجيين، ما احتمال أن تكونا من U_1 ؟

(في كل التمرين، تُعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

تمرين 2 (05 نقاط)

I- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بالعلاقة: $f(x) = x - (x-1)e^{-x}$.

(1) بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$.

(2) استنتج أنّه إذا كان $x \in [1; 2]$ فإنّ $f(x) \in [1; 2]$.

(3) بيّن أنّه إذا كان $x \in [1; +\infty[$ فإنّ $f(x) - x \leq 0$.

II- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 2$.

(2) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، المتتالية (u_n) متناقصة. استنتج أنّها متقاربة، ثم احسب نهايتها.

(3) (أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - 1 \leq \frac{8}{9}(u_n - 1)$.

(ب) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n - 1 \leq \left(\frac{8}{9}\right)^n$ ، ثم تأكد من نهاية (u_n) الموجودة سابقا.

تمرين 3 (09 نقاط)

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ $g(x) = (x - ex)(1 - \ln x)$ لـ $x > 0$ و $g(0) = 0$.
ليكن (\mathcal{C}_g) تمثيلها البياني في المستوى المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. وحدة الطول 2cm

(1) احسب النهايتين: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x}$.

(2) بين أن الدالة g غير قابلة للاشتقاق على يمين 0. فسّر ذلك بيانيا.

(3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $g'(x) = (e-1)\ln x$.

(4) استنتج اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = (x - e)(1 - \ln x)$.

ليكن (\mathcal{C}_f) تمثيلها البياني في المستوى المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، كما هو موضح في الوثيقة المرفقة.

(1) احسب النهايتين: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{e - x \ln x}{x}$.

(3) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (\mathcal{C}_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

III- (1) ادرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (\mathcal{C}_g) و (\mathcal{C}_f) ، مع تحديد نقاط تقاطعهما.

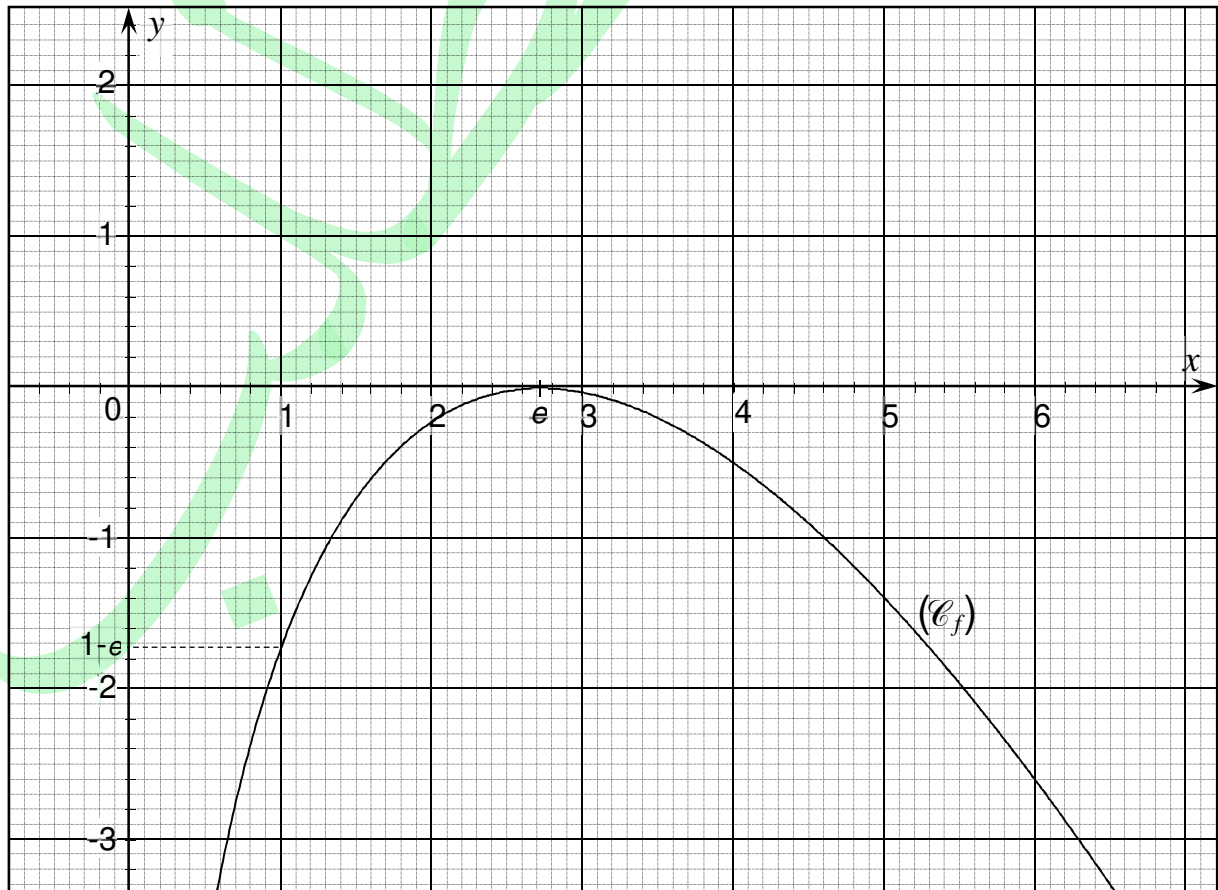
(2) ارسم على الوثيقة المرفقة المماس (Δ) ، والمنحنى (\mathcal{C}_g) .

(3) باستعمال التكامل بالتجزئة، بين أن $\int_1^e (x-1)(1-\ln x) dx = \frac{e^2 - 4e + 5}{4}$.

(4) احسب بـ cm^2 المساحة \mathcal{A} لمجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوى حيث: $1 \leq x \leq e$ و $g(x) \leq y \leq f(x)$.

سؤال إضافي: اقترح طريقة لحساب المساحة \mathcal{A}' لمجموعة النقط $M(x; y)$ حيث: $0 \leq x \leq 1$ و $g(x) \leq y \leq 0$.

الوثيقة المرفقة



تمرین 1:

$P_1 = \frac{C_9^2}{C_{19}^2} = \frac{4}{19}$ (1-I)

$P_2 = \frac{C_6^2}{C_{19}^2} = \frac{5}{57}$ (2)

$\{6, 12, 18\} P_3 = \frac{C_3^2}{C_{19}^2} = \frac{1}{57}$ (3)

$P_4 = P_1 + P_2 - P_3 = \frac{16}{57}$ (4)

$P_5 = \frac{P_3}{P_1} = \frac{1}{57} \times \frac{19}{4} = \frac{1}{12}$ (5)

$X = \{-6, 5, \alpha\}$ (6)

$P(X=-6) = \frac{C_9^1 \times C_{10}^1}{C_{19}^2} = \frac{10}{19}$

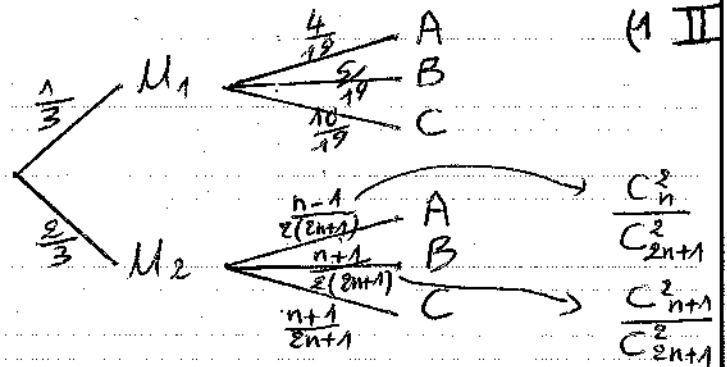
$P(X=5) = \frac{C_9^2}{C_{19}^2} = \frac{4}{19}$

$P(X=\alpha) = \frac{C_{10}^2}{C_{19}^2} = \frac{5}{19}$

x_i	-6	5	α
$P(X=x_i)$	$\frac{10}{19}$	$\frac{4}{19}$	$\frac{5}{19}$

$E(X) = \frac{-60}{19} + \frac{20}{19} + \frac{5\alpha}{19} = \frac{5\alpha - 40}{19}$

$\alpha = 8$ \cup $E(X) = 0$ (✓)



$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{19} + \frac{2}{3} \left(\frac{n-1}{2(2n+1)} \right) = \frac{9n-5}{19(2n+1)}$ (2)

$P_A(U_n) = \frac{P(A \cap U_n)}{P(A)} = \frac{4}{3 \times 19} \times \frac{19(2n+1)}{9n-5} = \frac{4(2n+1)}{3(9n-5)}$

تمرین 2:

$f'(x) = 1 - [e^{-x} - e^{-x}(x-1)]$ (1-I)

$f'(x) = 1 - 2e^{-x} + xe^{-x}$

لدینا: $x \leq -1$ و $x \geq 1$

$-2e^{-x} \geq -2e^{-1}$ و $e^{-x} \leq e^{-1}$

$1 - 2e^{-x} \geq 1 - 2e^{-1} > 0$

فإن $f'(x) > 0$ و $xe^{-x} > 0$ و f متزايدة تماماً

f متزايدة تماماً

$f(1) \leq f(x) \leq f(2)$ و $1 \leq x \leq 2$ (2)

$2 - e^{-2} \leq 2$ و $1 \leq f(x) \leq 2 - e^{-2}$

$1 \leq f(x) \leq 2$ و

$f(x) - x = (1-x)e^{-x}$ (3)

$1-x \leq 0$ و $-x \leq -1$ و $x \geq 1$

$f(x) - x \leq 0$ و

(نقطة) $1 \leq M_n \leq 2$ و $M_n = 2$: $n=0$ (1 II)

فرض صفة: $1 \leq M_n \leq 2$ و $1 \leq M_{n+1} \leq 2$

f متزايدة و $f(1) \leq f(M_n) \leq f(2)$ و

(نقطة) $1 \leq M_{n+1} \leq 2 - e^{-2} \leq 2$

و $1 \leq M_n \leq 2$: $n \in \mathbb{N}$ و $1 \leq M_n \leq 2$

$M_{n+1} - M_n = f(M_n) - M_n \leq 0$ (2)

سبب (3-I) $(f(x) - x \leq 0)$

و (M_n) متناقصة

(M_n) متناقصة و متزايدة من اليمين (نقطة)

$l = l - (l-1)e^{-l}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} M_{n+1} = l$

$l = 1$ و $(l-1)e^{-l} = 0$

$M_{n+1} - 1 = M_n - (M_n - 1)e^{-M_n} - 1$ (3)

$M_{n+1} - 1 = (M_n - 1)(1 - e^{-M_n})$

$-2 \leq -M_n \leq -1$ و $-1 \leq M_n \leq 2$

$-e^{-1} \leq -e^{-M_n} \leq -e^{-2}$ و $e^{-2} \leq e^{-M_n} \leq e^{-1}$