اختبار الفصل الأول

تنبيه: الكتابة باللون الأزرق أو الأسود فقط

التمرين الأول: [10 نقاط]

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = e^x + x - 2$$

[01 ن] ❶ ادرس تغيرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها

[0.5 ن] ❷ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ حيث: $0.4 < \alpha < 0.5$

[0.5 ن] ❸ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x-3}{1+e^{-x}}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$

[1.5 ن] ❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ وفسر النتيجة هندسيا

❷

[01 ن] أ/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x، لدينا:

$$f'(x) = \frac{g(x)e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

[01 ن] ب/ استنتج تغيرات الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها

❸

[0.5 ن] أ/ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 3$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

[0.5 ن] ب/ ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)

[01 ن] ❹ أثبت أنّ $f(\alpha) = a - 2$، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

❺

[0.5 ن] أ/ أوجد نقط تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الاحداثيات

[01 ن] ب/ مثّل بيانيا كلا من (Δ) و (C_f)

[01 ن] ❻ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$f(x) = m$$

| إقلب الورقة

التمرين الثاني: [10 نقاط]

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=x\ln x-x-1$$

[01 ن] ❶ ادرس تغيرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها

[0.5 ن] ❷ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;+\infty[$ حيث: $3.5<\alpha<3.6$

[0.5 ن] ❸ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=1-\frac{\ln x}{x+1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

[01 ن] ❶ احسب نهايات الدالة f ، ثم فسر النتائج المحصل عليها هندسيا

❷

[02 ن] أ/ بيّن أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

[01 ن] ب/ استنتج تغيرات الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها

[01 ن] ❸ اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

[01 ن] ❹ مثّل بيانيا كلا من (T) و (C_f) ، (نأخذ $f(\alpha)\approx 0.7$)

III) لتكن الدالة h المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي:

$$h(x)=-\frac{\ln(x-1)}{x}$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

[01 ن] ❶ تحقق أنّ $h(x)+1=f(x-1)$

[01 ن] ❷ استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بواسطة تحويل نقطي يطلب تعيينه

| إنتهى ✔

اعلم أنّ مسافة الألف ميل تبدأ بخطوة

وتذكّر أنّ الوقت المتبقي لموعد بكالوريا 2022 هو:

199 يوم فقط

⌛

حل التمرين الأول:

I)

❶ دراسة تغيرات الدالة g:

- النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = e^x + 1 > 0$$

- جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

❷ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$:

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا: $g(0.5) \times g(0.4) < 0$

لأنّ: $g(0.4) \approx -0.1$ و $g(0.5) \approx 0.1$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0.4; 0.5[$

❸ استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II)

❶

أ/ تبيين أنه $f(x) = \frac{e^x(x-3)}{1+e^x}$:

$$f(x) = \frac{x-3}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-x}(xe^x - 3e^x)}{e^{-x}(e^x+1)} = \frac{xe^x - 3e^x}{e^x+1} = \frac{e^x(x-3)}{e^x+1}$$

ب/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

ج/ تبيين أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x(x-3)}{e^x+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{xe^x - 3e^x}{e^x+1}\right) = 0$$

لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x) = 0$

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته: $y = 0$

❷

أ/ تبيين أنه $f'(x) = \frac{g(x)e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$:

$$f'(x) = \frac{1+e^{-x} - (-e^{-x})(x-3)}{(1+e^{-x})^2} = \frac{1+e^{-x}+xe^{-x}-3e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{1+e^{-x}+xe^{-x}-3e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{1-2e^{-x}+xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{(e^x-2+x)e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{g(x)e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

ب/ استنتاج تغيرات الدالة f:

لدينا: $(1+e^{-x})^2 > 0$ و $e^{-x} > 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

❸

أ/ تبيين أن (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y_{(\Delta)}] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-3}{1+e^{-x}} - x + 3\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-3-x-xe^{-x}+3+3e^{-x}}{1+e^{-x}}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-xe^{-x}+3e^{-x}}{1+e^{-x}}\right] = 0$$

إذن (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ):

لدينا:

$$f(x) - y_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow \frac{-xe^{-x}+3e^{-x}}{1+e^{-x}} = 0 \Rightarrow -xe^{-x}+3e^{-x} = 0$$

$$\Rightarrow e^{-x}(3-x)=0$$

لدينا: $e^{-x}\neq 0$

ومنه: $3-x=0$

إذن: $x=3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

- (C_f) فوق (Δ) لما $x\in\ ]-\infty;3[$
- (C_f) يقطع (Δ) لما $x=3$
- (C_f) تحت (Δ) لما $x\in\ ]3;+\infty[$

❹ اثبات أنّ $f(\alpha)=a-2$

لدينا:

$$g(\alpha)=0\Rightarrow e^{\alpha}-2+\alpha=0$$
$$\Rightarrow e^{\alpha}=2-\alpha$$

ومنه:

$$f(\alpha)=\frac{e^{\alpha}(\alpha-3)}{e^{\alpha}+1}=\frac{(2-\alpha)(\alpha-3)}{2-\alpha+1}=\frac{(2-\alpha)(\alpha-3)}{-(\alpha-3)}=-(2-\alpha)=\alpha-2$$

- استنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$:

لدينا:

$$0.4<\alpha<0.5$$

ومنه:

$$-1.6<\alpha-2<-1.5$$

إذن:

$$-1.6<f(\alpha)<-1.5$$

❺

أ/ ايجاد نقط تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الاحداثيات:

- مع حامل محول الفواصل:

$$f(x)=0\Rightarrow\frac{x-3}{1+e^{-x}}=0$$
$$\Rightarrow x-3=0$$
$$\Rightarrow x=3$$

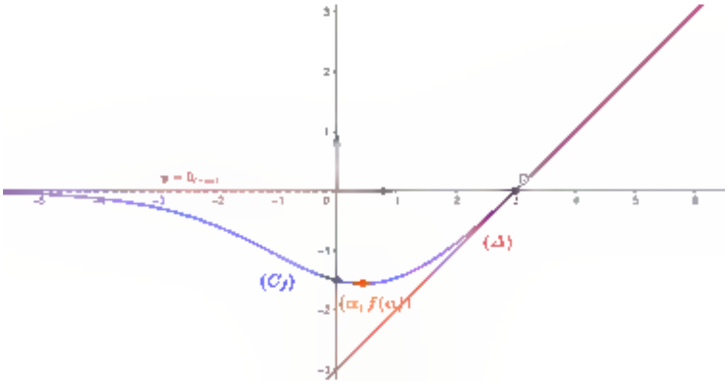
إذن: $(C_f)\cap(xx')=\{3\}$

- مع حامل محور التراتيب:

$$f(0)=\frac{0-3}{1+e^{-0}}=-\frac{3}{2}$$

اذن: $(C_f)\cap(yy')=\left\{-\frac{3}{2}\right\}$

ب/ التمثيل البياني لكلا من (Δ) و (C_f):



❻ المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=m$:

لما $m<f(\alpha)$ المعادلة لا تقبل حلول

لما $m=f(\alpha)$ المعادلة تقبل حل مضاعف موجب تماما

لما $f(\alpha)<m<f(0)$ المعادلة تقبل حلين موجبين تماما

لما $m=f(0)$ المعادلة تقبل حل معدوم وحل موجب تماما

لما $f(0)<m<0$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة

لما $m\geq 0$ المعادلة تقبل حلا موجبا تماما

حل التمرين الثاني:

I)

❶ دراسة تغيرات الدالة g:

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x\left(\ln x - 1 - \frac{1}{x}\right)\right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left[\underbrace{x\ln x}_{0} - x - 1\right] = -1$$

- المشتقة:

$$g'(x) = \ln x + \frac{1}{x}x - 1 = \ln x$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

- جدول التغيرات:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	-1 ↘	-2	↗ $+\infty$

❷ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة مستمرة ورتيبة على المجال $]3.5; 3.6[$

ولدينا: $g(3.5) \times g(3.6) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]3.5; 3.6[$

❸ استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II)

❶ حساب نهايات الدالة f :

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\overset{0}{\overbrace{\frac{\ln x}{x}}}}{1+\frac{1}{x}}\right) = 1$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 1$

$$\bullet \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty$$

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 0$

❷

أ/ تبيين أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$:

$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{x}(x+1) - \ln x}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{\frac{x+1-x\ln x}{x}}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{x+1-x\ln x}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{-x-1+x\ln x}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$$

ب/ استنتاج تغيرات الدالة f:

لدينا: $x(x+1)^2 > 0$ على المجال $]0; +\infty[$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

- جدول التغيرات:

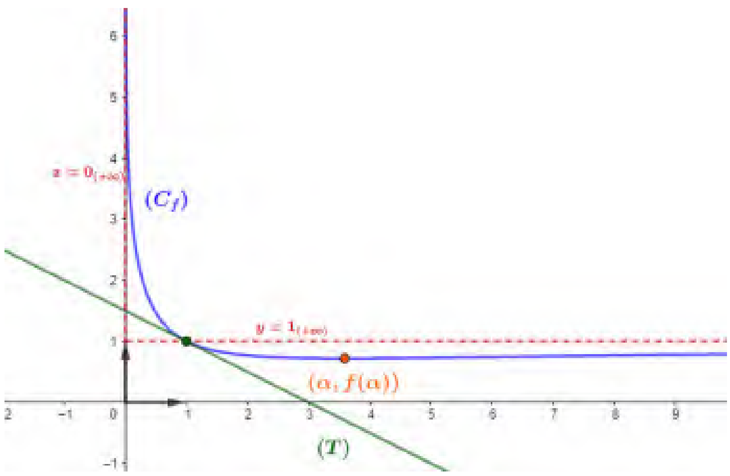
x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 ↘	$f(\alpha)$	↗ 1

❸ اكتب معادلة المماس (T) :

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1) = -\frac{1}{2}(x-1) + 1$$

$$= -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

❹ التمثيل البياني:



III)

❶ التحقق أنّ $h(x) + 1 = f(x-1)$:

$$h(x) + 1 = 1 - \frac{\ln(x-1)}{x} = f(x-1)$$

❷ استنتاج أن (C_h) هو صورة (C_f) :

لدينا: $h(x) + 1 = f(x-1)$

ومنه: $h(x) = f(x-1) - 1$

إذن: (C_h) هو صورة (C_f) بإنسحاب شعاعه $\vec{u}$ حيث: $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$