الاختبار الأول في مادة الرياضيات

المستوى: الثالثة رياضيات و تقني رياضي **المدة: ساعتان**

التمرين الاول : 13ن

كل إجابة تقدم على ورقة المحاولة لا تصحح

الجزء الأول :

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=\left(x^2-2x+e\right)e^x+e-1$

1- ادرس تغيرات الدالة g.

2- بين انه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x)\succ e-1$

- استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني :

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{-x^2+ex}{x-1}-\ln\left(e^{-x}+1\right)$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}1} f(x)$; $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}1} f(x)$ ثم بين أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=e-1$

- استنتج المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة f.

2- بين أنه من أجل كل x من $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{(x-1)^2\left(e^x+1\right)}$

3- استنتج اتجاه التغير الدالة f ,ثم شكل جدول تغيراتها.

4- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+e-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

5- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و λ حيث: $-0,5\prec\alpha\prec-0,3$ و $2,6\prec\lambda\prec2,7$.

6- ضع النتيجة دون حساب $\lim\limits_{x\to\lambda}\dfrac{f(x)-f(\lambda)}{x-\lambda}$, ثم فسر النتيجة هندسيا.

7- انشاء كلا من المستقيمات المقاربة والمنحنى (C_f).

8- ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما λ عدد حلول المعادلة: $e^{\frac{-x^2+ex}{x-1}}=\dfrac{\lambda}{e^x}+\lambda$

9- لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=\dfrac{-x^2-e|x|}{-|x|-1}-\ln\left(e^{|x|}+1\right)+\ln 2$

10-جد العلاقة بين الدالة h والدالة f.

11-انشاء المنحنى (C_h) انطلاقا من منحنى الدالة f .

تتوقف عن المحاولة تتوقف عن الابداع

التمرين الثاني : 7ن

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_1=2$; $u_0=1$ و $u_{n+2}=2u_{n+1}+3u_n$

1- نعتبر (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بمايلي: $v_n=\alpha u_n+\beta u_{n-1}$ حيث $\alpha;\beta$ عددان حقيقيان غير معدومين.

أ- احسب $u_2;u_3$.

ب- احسب $v_1;\ v_2;\ v_3$ بدلالة α و β.

ج- بيّن أنه إذا كانت v_1, v_2 و v_3 ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية فإنّ: $-\beta^2-2\alpha\beta+3\alpha^2=0$

2- نضع $\beta=\alpha$

أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب- اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}^*$: $u_n+u_{n-1}=3^n$

ج- احسب $P_n=v_1\times v_2\times\cdots\times v_n$

3- نضع $\beta=-3\alpha$

أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب- اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}^*$: $u_n+u_{n-1}=(-1)^n$

4- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية معناه $\beta=\alpha$ أو $\beta=-3\alpha$

انتهى بالتوفيق للجميع

مع تحيات

الأستاذ: قشار صالح

توقف عن المحاولة تتوقف عن الابداع

KECHAR SALAH

الحل النموذجي للاختبار الأول في مادة الرياضيات

ثانوية سيدي اعباز الثالثة تقني رياضي ورياضيات

التمرين الأول:

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x)=\left(x^2-2x+e\right)e^x+e-1$$

1- دراسة تغيرات الدالة g.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-2x+e\right)e^x+e-1=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=x^2e^x-2xe^x+ee^x+e-1=e-1$$

- حساب المشتقة:

$$g'(x)=(2x-2)e^x+e^x\left(x^2-2x+e\right)=e^x\left(x^2-2+e\right)$$

لدينا $x^2-2+e\succ 0$ ومنه $g'(x)\succ 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما.

- تبيان انه من أجل كل عدد حقيقي x: $g(x)\succ e-1$

بما أن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)=e-1$

فإن $g(x)\succ e-1$

- استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

بما أن $e-1\succ 0$ فإن $g(x)\succ 0$

الجزء الثاني :

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

كما يلي: $f(x)=\dfrac{-x^2+ex}{x-1}-\ln\left(e^{-x}+1\right)$

1- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x);\ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)$

ثم بين أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=e-1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+ex}{x-1}-\ln\left(e^{-x}+1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}-x=-\infty$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}-x^2+ex=-1+e\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}x-1=0^-\end{cases}$$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=-\infty$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}-x^2+ex=-1+e\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}x-1=0^+\end{cases}$$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+ex}{x-1}-\ln\left(e^{-x}\left(1+e^x\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+ex}{x-1}+x-\ln\left(1+e^x\right)$$

$$=\frac{-x^2+ex+x^2-x}{x-1}-\ln\left(1+e^x\right)$$

$$=\frac{\cancel{x}(e-1)}{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\ln\left(1+e^x\right)=e-1$$

- استنتاج المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة f.

للمنحنى مستقيمات مقاربة التالية: $x=1\ ;\ y=e-1$

2- تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$: $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{(x-1)^2\left(e^x+1\right)}$

$$f'(x)=\frac{(-2x+e)(x-1)-\left(-x^2+ex\right)}{(x-1)^2}+\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$$

$$=\frac{-2x^2+2x+ex-e+x^2-ex}{(x-1)^2}+\frac{1}{e^x+1}$$

$$=\frac{\left(-x^2+2x-e\right)\left(e^x+1\right)+x^2-2x+1}{(x-1)^2\left(e^x+1\right)}$$

$$=\frac{\left(-x^2+2x-e\right)e^x-e+1}{(x-1)^2\left(e^x+1\right)}=\frac{-g(x)}{(x-1)^2\left(e^x+1\right)}$$

3- استنتاج اتجاه التغير الدالة f, ثم تشكيل جدول تغيراتها.

لدينا $(x-1)^2\left(e^x+1\right)\succ 0$ و $-g(x)\prec 0$ ومنه $f'(x)\prec 0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\|$	$-$
$f(x)$	$e-1 \searrow -\infty$	$\|$	$+\infty \searrow -\infty$

4- تبيان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+e-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(-x+e+1)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+ex}{x-1}-\ln\left(e^{-x}+1\right)+x-e-1$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e-1}{x-1}-\ln\left(e^{-x}+1\right)=0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+e-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

5- تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و λ حيث: $-0,5\prec\alpha\prec-0,3$ و $2,6\prec\lambda\prec2,7$.

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على $[-0,5;-0,3]$ و

$f(-0,5)=0,1$ $f(-0,3)=-0,1$ بما أن $f(-0,5)f(-0,3)\prec0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x)=0$ تقبل حلا α حيث $-0,5\prec\alpha\prec-0,3$

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[2,6;2,7]$

$f(2,6)=0,12$ $f(2,7)=-0,02$

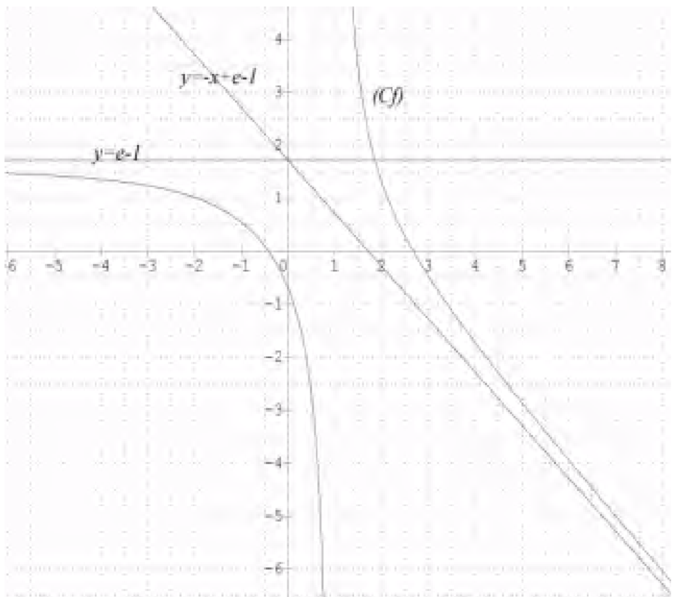
بما أن $f(2,6)f(2,7)\prec0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x)=0$ تقبل حلا λ حيث $2,6\prec\lambda\prec2,7$

6- $\lim_{x\to\lambda}\frac{f(x)-f(\lambda)}{x-\lambda}=f'(\lambda)$، التفسير النتيجة هندسيا

العدد $f'(\lambda)$ معامل توجيه المماس عند الفاصلة λ.

7- انشاء كلا من المستقيمات المقاربة والمنحنى



9- المناقشة بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما λ عدد حلول

المعادلة: $e^{\frac{-x^2+ex}{x-1}}=\frac{\lambda}{e^x}+\lambda$

ومنه $\frac{-x^2+ex}{x-1}=\ln\left(\frac{\lambda}{e^x}+\lambda\right)$

ومنه $\frac{-x^2+ex}{x-1}=\ln\left(\lambda\left(\frac{1}{e^x}+1\right)\right)$

ومنه $\frac{-x^2+ex}{x-1}=\ln\lambda+\ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right)$

$$\frac{-x^2+ex}{x-1}-\ln\left(e^{-x}+1\right)=\ln\lambda$$

ومنه $f(x)=\ln(\lambda)$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم $y=\ln\lambda$

$\ln\lambda\in]-\infty;e-1[$ يكافئ $\lambda\in]0,e^{e-1}[$ للمعادلة حلين.

$\ln\lambda[e-1;+\infty[$ يكافئ $\lambda\in[e^{e-1};+\infty[$ للمعادلة حل وحيد

لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

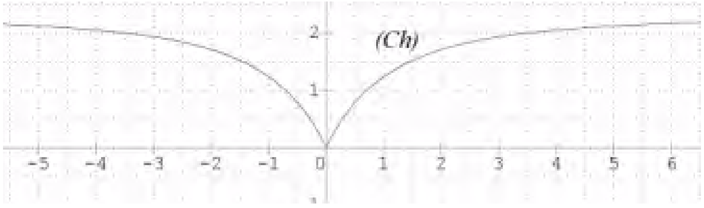
$$h(x)=\frac{-x^2-e|x|}{-|x|-1}-\ln\left(e^{|x|}+1\right)+\ln2$$

10- ايجاد العلاقة بين الدالة h والدالة f: $h(x)=f(-|x|)+\ln2$

لدينا $x\mapsto f(-|x|)$ منحنها هو نظير الجزء من المنحنى (C_f) الواقع في المجال $]-\infty;0]$

ومنه (C_h) هو صورة لمنحنى الدالة $x\mapsto f(-|x|)$ بانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\ \ln2\end{pmatrix}$

11- انشاء المنحنى (C_h) انطلاقا من منحنى الدالة f.



انتهى بالتوفيق للجميع

الأستاذ: قشار صالح

توقف عن المحاولة تتوقف عن الابداع

التمرين الثاني:

1. $v_n = \alpha u_n + \beta u_{n-1}$

أ. حساب الحدود: $u_2 = 7$; $u_3 = 20$.

ب. حساب الحدود: $v_3; v_2; v_1$ ، $v_1 = 2\alpha + \beta$ ، $v_2 = 7\alpha + 2\beta$ ، $v_3 = 20\alpha + 7\beta$

جـ. $v_3; v_2; v_1$ حدود متتابعة من متتالية هندسية معناه $v_2^2 = v_1 \times v_3$ معناه $(7\alpha + 2\beta)^2 = (2\alpha + \beta)(20\alpha + 7\beta)$

معناه $9\alpha^2 - 6\alpha\beta - 3\beta^2 = 0$ معناه $3\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 = 0$

2. نضع $\beta = \alpha$:

أ. لدينا $v_n = \alpha u_n + \alpha u_{n-1}$ معناه $v_n = \alpha(u_n + u_{n-1}) \cdots\cdots(1)$ من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$:

ب. و منه

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \alpha(u_{n+1} + u_n) \\ &= \alpha(2u_n + 3u_{n-1} + u_n) \\ &= \alpha(3u_n + 3u_{n-1}) \\ v_{n+1} &= 3v_n \end{aligned}$$

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$ و حدها الأول $v_1 = 3\alpha$.

ت. لدينا : $v_n = v_1 \times 3^{n-1}$ و منه $v_n = 3\alpha \times 3^{n-1}$ معناه : $v_n = \alpha \times 3^n \cdots\cdots(2)$ من (1) و (2) نستنتج أنّ:

$\alpha(u_n + u_{n-1}) = \alpha \times 3^n$ معناه $u_n + u_{n-1} = 3^n$

حساب المجموع: $P_n = v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_n$ لدينا $v_n = \alpha \times 3^n$ ومنه

$$\begin{aligned} P_n &= \alpha \times 3^1 \times \alpha \times 3^2 \times \ldots \times \alpha \times 3^n \\ &= \alpha^n \times 3^{1+2+\ldots+n} \\ P_n &= \alpha^n 3^{\frac{n}{2}(n+1)} \end{aligned}$$

3. نضع $\beta = -3\alpha$:

أ. إثبات أنّ (v_n) متتالية هندسية .

لدينا $v_n = \alpha u_n - 3\alpha u_{n-1} \cdots\cdots(1)$

من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$:

و منه

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \alpha(u_{n+1} - 3u_n) \\ &= \alpha(2u_n + 3u_{n-1} - 3u_n) \\ &= \alpha(-u_n + 3u_{n-1}) \\ &= -\alpha(u_n - 3u_{n-1}) \\ v_{n+1} &= -v_n \end{aligned}$$

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = -1$ و حدها الأول $v_1 = -\alpha$.

ب. لدينا $v_n = -\alpha(-1)^{n-1}$ و منه $v_n = \alpha(-1)^n \cdots\cdots(2)$ من (1) و (2) نستنتج أنّ:

$\alpha(u_n - 3u_{n-1}) = \alpha(-1)^n$ و منه

$u_n - 3u_{n-1} = (-1)^n$

4. (v_n) متتالية هندسية معناه $3\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 = 0$

$\Delta = 16\beta^2$ معناه $\alpha = \beta$ و $\alpha = -3\beta$.