اختبار الفصل الأول

المدة: ساعتان ◄ تنبيه: الإجابة تكون بمنهجية واضحة ودقيقة وباستعمال اللون الأزرق والأسود فقط ► الأستاذ: قويسم خليل

◄ التمرين الأول [05 نقاط]

لكل سؤال إجابة واحد من ثلاث إجابات مقترحة، اختر الجواب الصحيح مع التبرير.

① إذا كان منحني الدالة f يقبل مماسا معادلته: $x = 2$ فإن:

أ) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right) = 1$ ب) $\lim_{h\to 2}\left(\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\right) = 0$ ج) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right) = +\infty$

② حلول المعادلة التفاضلية: $y = \sqrt{2}y' - 1$ هي حلول الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

أ) $f: x \longmapsto ce^{\sqrt{2}x} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ ب) $f: x \longmapsto ce^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} - 1$ ج) $f: x \longmapsto ce^{\frac{1}{\sqrt{2}}x} + 1$

③ حلول المتراجحة: $2\ln(x-1) > 1$ هي:

أ) $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ ب) $]1; +\infty[$ ج) $]e; +\infty[$

④ f دالة موجبة تماما على $\mathbb{R}$ وَ $\lim_{x\to -\infty}(f(x)) = 0$ ، لدينا:

أ) $\lim_{x\to -\infty}(\ln(f(x))) = 1$ ب) $\lim_{x\to -\infty}(\ln(f(x)))$ غير موجودة ج) $\lim_{x\to -\infty}(\ln(f(x))) = -\infty$

⑤ إذا كان $f(x) = ln\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)$ ، فإن:

أ) $f' = \frac{g'\cdot h + h'\cdot g}{h^2}$ ب) $f' = \frac{g'\cdot h - h'\cdot g}{g\cdot h}$ ج) $f' = \frac{g'\cdot h - h'\cdot g}{h^2}$

◄ التمرين الثاني [04 نقاط]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \end{cases}$$

① احسب u_1، u_2 و u_3 .

② نضع من أجل كل عدد n : $v_n = u_n - 2n + 6$.

أ/ احسب v_0، v_1 وv_2.

ب/ اثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها.

ج/ اكتب عبارة (v_n) بدلالة n ، ثم استنتج عبارة (u_n) بدلالة n .

③ احسب نهاية المتتالية (u_n) .

④ عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

◄ التمرين الثالث [09 نقاط]

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = 2x - 7 + 2e^{x}$$

① ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

② اثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.5 < \alpha < 1$.

③ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

① ادرس إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

② احسب نهايتي الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

③ أ/ بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) معادلته $y = 2x - 5$ بجوار $+\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) .

④ أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f'(x) = g(x) \cdot e^{-x}$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

⑤ أ/ بين أن الدالة h المعرفة على المجال $I = \left]-\infty; \frac{5}{2}\right]$ كما يلي:

$$h(x) = \frac{(2x-5)^2}{2x-7}$$

متزايدة تماما على I .

ب/ بيّن أن:

$$f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2a-7}$$

ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

⑥ مثل بيانيا كل من المستقيم (D) والمنحني (C_f) .

⑦ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة (E) حيث:

$$f(x) = -2m \dots (E)$$

◄ التمرين الأول [05 نقاط]

السؤال	الجواب الصحيح	التبرير
إذا كان منحنى الدالة f يقبل مماسا معادلته: $x=2$ فإن:	$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\right)=+\infty$ 0.25ن	لما $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)=\pm\infty$ الدالة f تقبل مماسا عموديا معادلته $x=a$ 0.5ن
حلول المعادلة التفاضلية: $y=\sqrt{2}y'-1$ هي مجموعة الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:	0.25ن $f:x\longmapsto ce^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}-1$	الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ هو $x\longmapsto y(x)=ce^{ax}-\frac{b}{a}$ حيث: $c\in\mathbb{R}$ 0.5ن ولدينا: $y=\sqrt{2}y'-1\Rightarrow y'=\dfrac{y+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 0.5ن اذن حلول المعادلة التفاضلية هي مجموعة الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: 0.5ن $f:x\longmapsto ce^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}-1$
حلول المتراجحة: $2\ln(x-1)>1$	0.25ن $\left]\sqrt{e}+1;+\infty\right[$	لدينا: $2\ln(x-1)>1\Rightarrow\ln(x-1)>\dfrac{1}{2}$ 0.5ن $\Rightarrow x-1>e^{\frac{1}{2}}\Rightarrow x>\sqrt{e}+1$ ومنه مجموعة الحلول هي: $x\in\left]\sqrt{e}+1;+\infty\right[$
f دالة موجبة تماما على $\mathbb{R}$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=0$	$\lim\limits_{x\to-\infty}[\ln(f(x))]=-\infty$ 0.25ن	نضع: $u(x)=\ln x$ وَ 0.5ن $v(x)=(u\circ f)(x)=\ln(f(x))$ ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty}[\ln(f(x))]=\lim\limits_{x\to 0}[u(x)]=\lim\limits_{x\to 0}[\ln x]=-\infty$
إذا كان: $f(x)=\ln\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)$ فإن:	0.25ن $f'=\dfrac{g'\cdot h-h'\cdot g}{g\cdot h}$	$f'=\dfrac{\left(\frac{g'\cdot h-h\cdot g}{h^2}\right)}{\frac{g}{h}}=\dfrac{\left(\frac{g'\cdot h-h\cdot g}{h}\right)}{g}$ $=\dfrac{g'\cdot h-h'\cdot g}{g\cdot h}$ 0.5ن

◄ التمرين الثاني [04 نقاط]

① حساب u_1، u_2 و u_3 :

$$u_{0+1}=\frac{1}{2}u_0+0-1\Rightarrow u_1=\frac{1}{2}-1\Rightarrow \boxed{u_1=-\frac{1}{2}}$$

$$u_{1+1}=\frac{1}{2}u_1+1-1\Rightarrow u_2=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow \boxed{u_2=-\frac{1}{4}}$$ 0.5ن

$$u_{2+1}=\frac{1}{2}u_2+2-1\Rightarrow u_3=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)+1\Rightarrow \boxed{u_3=\frac{7}{8}}$$

②

أ/ حساب v_0، v_1، v_2 :

$$v_0 = u_0 - 2(0) + 6 \Rightarrow \boxed{v_0 = 7}$$
$$v_1 = u_1 - 2(1) + 6 \Rightarrow \boxed{v_1 = \frac{7}{2}}$$
$$v_2 = u_2 - 2(2) + 6 \Rightarrow \boxed{v_2 = \frac{7}{4}}$$

0.5ن

ب/ اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2(n+1) + 6 = \frac{1}{2}u_n + n - 1 - 2n - 2 + 6 = \frac{1}{2}u_n - n + 3 = \frac{1}{2}(u_n - 2n + 6) = \frac{1}{2}v_n$$

ولدينا: $v_0 = 7$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول 7 .

0.5ن

ج/ كتابة عبارة (v_n) بدلالة n :

$$\boxed{v_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

0.5ن

- استنتاج عبارة (u_n) بدلالة n :

$$v_n = u_n - 2n + 6 \Rightarrow u_n = v_n + 2n - 6 \Rightarrow u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$$

0.5ن

③ حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6\right) = +\infty$$

لأن: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

0.5ن

④ التعبير بدلالة n عن المجموع S_n:

لدينا:

$$u_n = v_n + 2n - 6 = v_n + w_n$$

حيث (w_n) حسابية أساسها 2 وحدها الأول -6

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
$$= v_0 + 2(0) - 6 + v_1 + 2(1) - 6 + \cdots + v_n + 2n - 6$$

نضع $w_n = 2n - 6$

نلاحظ أن w_n عبارة متتالية حسابية أساسها 2 وحدها الأول -6 ومنه:

$$S_n = (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + (w_0 + w_1 + \cdots + w_n)$$
$$= 7\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right) + (n+1)\frac{(2n - 6 - 6)}{2}$$
$$= 7\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}\right) + (n+1)\frac{(2n - 12)}{2}$$
$$= \boxed{14\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + (n+1)(n-6)}$$

1ن

◄ التمرين الثالث [09 نقاط]

(I

① دراسة تغيرات الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها:

- النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} [g(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty} [2x - 7 + 2e^x] = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty} [2x - 7 + 2e^x] = +\infty$

0.5ن

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 2 + 2e^x > 0$$

0.25ن

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

0.25ن

② اثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.5 < \alpha < 1$:

لدينا: الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$

0.5ن

ولدينا: $g(0.5) \cong -2.7$ و $g(1) \cong 0.43$

ولدينا: $g(1) \times g(0.5) < 0$

ومنه فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0.5; 1[$.

③ استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

0.25ن

(II

① دراسة إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا:

$$f(x) = 0 \Rightarrow (2x-5)(1-e^{-x}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 5 = 0 \\ \text{أو} \\ 1 - e^{-x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 5 \\ \text{أو} \\ e^{-x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ \text{أو} \\ -x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ \text{أو} \\ x = 0 \end{cases}$$

0.5ن

ومنه:

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-e^{-x}$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

0.5ن

② حساب نهايتي الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty} [(2x-5)(1-e^{-x})] = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} [(2x-5)(1-e^{-x})] = +\infty$

0.5ن

③ أ/ تبيين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) معادلته $y=2x-5$ بجوار $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}[(2x-5)(1-e^{-x})-(2x-5)]=\lim_{x\to+\infty}[(2x-5)(1-e^{-x}-1)]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}[-e^{-x}(2x-5)]=\lim_{x\to+\infty}[5e^{-x}-2xe^{-x}]=0-0=0$$ 0.5ن

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$:

$$f(x)-y=0\Rightarrow -e^{-x}(2x-5)=0\Rightarrow e^{-x}(-2x+5)=0\Rightarrow -2x+5=0\Rightarrow x=\frac{5}{2}$$ 0.25ن

0.25ن

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$

- الوضعية: 0.25ن

- لما $x\in\left]-\infty;\frac{5}{2}\right[$ المنحنى (C_f) فوق (D).
- لما $x=\frac{5}{2}$ المنحني (C_f) يقطع (D) في النقطة ذات الاحداثيات $\left(\frac{5}{2};0\right)$
- لما $x\in\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$ المنحنى (C_f) تحت (D).

④ أ/ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x)=g(x)\cdot e^{-x}$:

$$f'(x)=2(1-e^{-x})+e^{-x}(2x-5)=2-2e^{-x}+2xe^{-x}-5e^{-x}=-7e^{-x}+2xe^{-x}+2$$
$$=e^{-x}(-7+2x+2e^{x})=e^{-x}\cdot g(x)$$ 0.5ن

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

لدينا $e^{-x}>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g'(x)$

0.25ن

0.25ن

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

⑤ أ/ تبيين أن الدالة h المعرفة على المجال $I=\left]-\infty;\frac{5}{2}\right]$ كما يلي: $h(x)=\frac{(2x-5)^2}{2x-7}$ متزايدة تماما على I .

$$h'(x)=0\Rightarrow\frac{2(2)(2x-5)(2x-7)-2(2x-5)^2}{(2x-7)^2}=0\Rightarrow\frac{2(2x-5)(2(2x-7)-2x+5)}{(2x-7)^2}=0$$
$$\Rightarrow\frac{2(2x-5)(2x-9)}{(2x-7)^2}=0$$

لما: $x\in I$

0.5ن

لدينا $(2x-7)^2>0$ و $(2x-5)>0$ و $(2x-9)>0$ إذن: $h'(x)>0$ ومنه الدالة h متزايدة تماما على I .

ب/ تبيين أن $f(\alpha)=\frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$:

لدينا

$$g(\alpha)=0\Rightarrow -7+2\alpha+2e^{\alpha}=0\Rightarrow e^{\alpha}=\frac{7-2\alpha}{2}\Rightarrow e^{-\alpha}=\frac{2}{7-2\alpha}$$ 0.25ن

ولدينا:

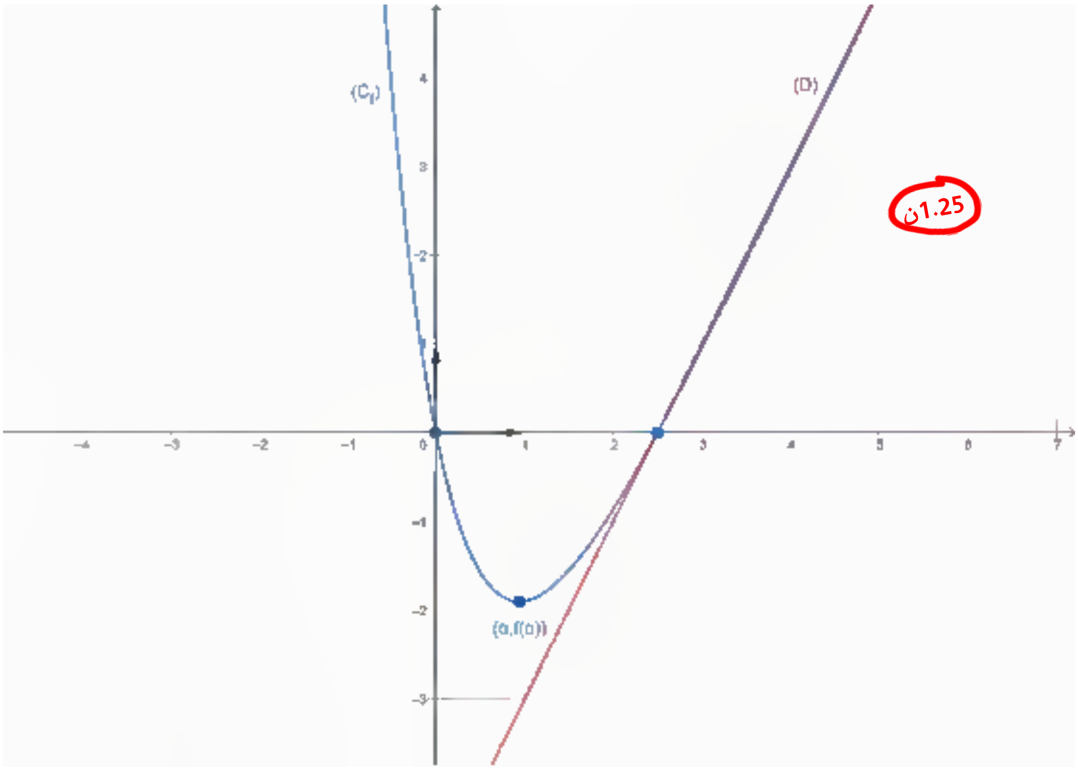
$$f(\alpha)=(2\alpha-5)(1-e^{-\alpha})=(2\alpha-5)\left(1-\frac{2}{7-2\alpha}\right)=(2\alpha-5)\left(\frac{7-2\alpha-2}{7-2\alpha}\right)=-(2\alpha-5)\left(\frac{2\alpha-5}{7-2\alpha}\right)$$
$$=-\frac{(2\alpha-5)^2}{7-2\alpha}=\frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}=h(\alpha)$$ 0.25ن

- حصر $f(\alpha)$:

بما أن الدالة h متزايدة تماما لدينا: 0.5ن

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1 \Rightarrow h\left(\frac{1}{2}\right) < h(\alpha) < h(1) \Rightarrow -\frac{8}{3} < h(\alpha) < -\frac{9}{5} \Rightarrow -\frac{8}{3} < f(\alpha) < -\frac{9}{5}$$

⑥ التمثيل بيانيا كل من المستقيم (D) والمنحني (C_f) :



1.25ن

⑦ المناقشة البيانية:

لما	$-2m < f(\alpha)$	أي	$m > -\frac{f(\alpha)}{2}$	المعادلة لا تقبل حلولا
لما	$-2m = f(\alpha)$	أي	$m = -\frac{f(\alpha)}{2}$	للمعادلة حل مضاعف
لما	$0 > -2m > f(\alpha)$	أي	$-\frac{f(\alpha)}{2} > m > 0$	للمعادلة حلان موجبان متمايزان
لما	$-2m = 0$	أي	$m = 0$	للمعادلة حل موجب وحل معدوم
لما	$-2m > 0$	أي	$m < 0$	للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة

0.75ن