التمرين الأول :(06 نقاط)

– أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير :

1)- مجموعة حلول المعادلة : $Ln(4x+5)-Ln(x-1)=5Ln2+Lnx$ هي : $S=\left\{\frac{-1}{8},\frac{5}{4}\right\}$

2)- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=Ln\left(2e^{3x}+e^{x}+5\right)$. $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) معادلته : $y=3x+Ln2$ بجوار $+\infty$.

3)- $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{Ln\left(x^{4046}+1\right)-Ln2}{x-1}\right)=2023$ (يمكن حساب هذه النهاية باستعمال تعريف العدد المشتق)

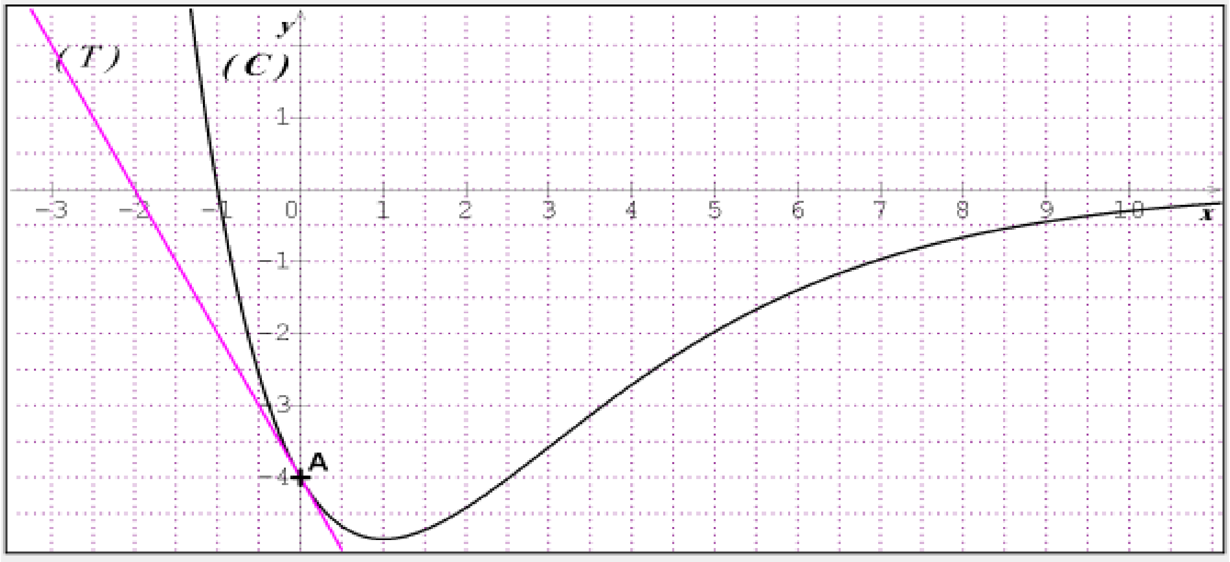
4)- مجموعة حلول المتراجحة : $3^{x+1}+\frac{2}{3^x}-7\leq0$ هي : $S=\left[-1,Ln\left(\frac{2}{3}\right)\right]$.

5)- حل المعادلة التفاضلية : $y'+3y-2=0$ التي تحقق الشرط : $f(0)=\frac{-1}{3}$ هو :

$$f(x)=\frac{-1}{e^{3x}}+\frac{2}{3}$$

التمرين الثاني :(06 نقاط)

I)- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(ax+b)e^{\frac{-x}{2}}$ ، حيث a و b عددان حقيقيان . (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. (T) هو المماس للمنحنى (C) عند النقطة $A(0,-4)$. كما هو موضح في الشكل المقابل



1)- **بقراءة بيانية حدد مايلي :**

أ)- $g(-1)$ ، $g(0)$ ، $g'(0)$ ، $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$ ، $\lim_{x\to +\infty} g(x)$. ب)- معادلة المماس (T) .

جـ)- جدول إشارة $g(x)$ ، ثم جدول إشارة $g'(x)$.

د)- قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m التي من أجلها المعادلة : $g(x)=Ln(m)$ تقبل حلين ختلفين في الإشارة .

2)- أثبت أن : $a=-4$ ، $b=-4$.

3)- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-8(x+3)e^{\frac{-x}{2}}$. (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد

و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. أ)- $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

بـ)- أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الداللة f على $\mathbb{R}$.

شكل جدول تغيرات الدالة f .

جـ)- بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف W يطلب تعيين إحداثياتها ثم أكتب معادلة المماس (D) عند هذه النقطة .

التمرين الثالث : (08 نقاط)

I)- لتكن الدالة g المعرفة على $D=\left]0,+\infty\right[$ بـ : : $g(x)=-x+3-Lnx$.

1)- أحسب : $\lim_{x\to 0^{>}} g(x)$ ، $\lim_{x\to +\infty} g(x)$. 2)- أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3)- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $2 \prec \alpha \prec 3$. استنتج إشارة $g(x)$ على D .

II)- لتكن الدالة f المعرفة على $D=\left]0,+\infty\right[$ بـ : $f(x)=-Lnx+\dfrac{Lnx-2}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1)- أحسب : $\lim\limits_{x \to 0^{+}} f(x)$ ، فسر هذه النتيجة بيانيا ، ثم أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)- أثبت أنه من أجل كل x من D: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة على D .

- شكل جدول تغيرات الدالة f على D.

3)- أثبت أن : $f(\alpha)=\alpha-4+\dfrac{1}{\alpha}$.

4)- (C_h) هو التمثيل البياني للدالة h المعرفة على D بـ : $h(x)=-Lnx$ في المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

أ)- أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-h(x)\right]$ ، ثم فسر هذه النتيجة بيانيا .

بـ)- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h). جـ)- أنشئ (C_h) و (C_f) . (نأخذ : $f(\alpha)\approx-1.4$)

III)- لتكن الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $k(x)=-Ln|x|+\dfrac{Ln|x|-2}{|x|}$. (C_k) هو التمثيل البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

أ)- أثبت أن الدالة k دالة زوجية .

بـ)- اشرح كيفية إنشاء (C_k) انطلاقا من (C_f) ، ثم أنشئه .

الإجابـــة النموذجية + سلـــم التنقيط :

التمرين الأول :(06 نقاط)

1)- الإجابة خاطئة لأن : .... (01.25ن)

$Ln(4x+5)-Ln(x-1)=5Ln2+Lnx$ معرفة يكافئ : $4x+5 \succ 0$ و $x-1 \succ 0$ و $x \succ 0$.

ومنه : $D=]1,+\infty[$

$Ln(4x+5)=Ln(x-1)+5Ln2+Lnx$ و $x \in D$.

$Ln(4x+5)=Ln(x-1)x+Ln2^5=Ln32x(x-1)$ و $x \in D$.

$4x+5=32x^2-32x$ و $x \in D$ ، $32x^2-36x-5=0$ و $x \in D$.

$\Delta=1936$ ، $x_1=\frac{-1}{8} \notin D$ ، $x_2=\frac{5}{4}$. ومنه : $S=\left\{\frac{5}{4}\right\}$

2)- الإجابة صحيحة لأن : .... (01.25ن)

ومنه :

$$\lim_{x \to +\infty}[f(x)-y]=\lim_{x \to +\infty}\left[Ln\left(2e^{3x}+e^{x}+5\right)-3x-Ln2\right]$$
$$\lim_{x \to +\infty}[f(x)-y]=\lim_{x \to +\infty}\left[Lne^{3x}\left(2+e^{-2x}+5e^{-3x}\right)-3x-Ln2\right]$$
$$\lim_{x \to +\infty}[f(x)-y]=\lim_{x \to +\infty}\left[Lne^{3x}+Ln\left(2+e^{-2x}+5e^{-3x}\right)-3x-Ln2\right]$$
$$\lim_{x \to +\infty}[f(x)-y]=\lim_{x \to +\infty}\left[3x+Ln\left(2+e^{-2x}+5e^{-3x}\right)-3x-Ln2\right]$$

$\lim_{x \to +\infty}[f(x)-y]=\lim_{x \to +\infty}\left[Ln\left(2+e^{-2x}+5e^{-3x}\right)-Ln2\right]=0$ لأن :

$$\lim_{x \to +\infty}Ln\left(2+e^{-2x}+5e^{-3x}\right)=Ln2$$

3)- الإجابة صحيحة لأن : .... (01.25ن)

نضع : $f(x)=Ln\left(x^{4046}+1\right)$ ، $f(1)=Ln2$ ، $f'(x)\frac{4046x^{4045}}{x^{4046}+1}$ ، $f'(1)=\frac{4046}{2}=2023$.

ومنه : $\lim_{x \to 1}\left(\frac{Ln\left(x^{4046}+1\right)-Ln2}{x-1}\right)=\lim_{x \to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2023$

4)- الإجابة خاطئة لأن : .... (01.25ن)

$3^{x+1}+\dfrac{2}{3^x}-7\le 0$ يكافئ : $3^{2x+1}+2-7\times 3^x\le 0$ (بضرب أطراف المتراجحة في 3^x) ومنه :

$3\times 3^{2x}+2-7\times 3^x\le 0$ أي أن : $3\times 3^{2x}-7\times 3^x+2\le 0$

نضع: $t=3^x\ (t\succ 0)$ ، $3t^2-7t+2\le 0$ ، $\Delta=25$ ، $t_1=\dfrac{1}{3}$ ، $t_2=2$.

$3^x=\dfrac{1}{3}$ يكافئ : $x=\dfrac{Ln\frac{1}{3}}{\ln 3}=\dfrac{-\ln 3}{\ln 3}=-1$ ، $3^x=2$ يكافئ : $x=\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ $\left(\dfrac{\ln 2}{\ln 3}\neq Ln\left(\dfrac{2}{3}\right)\right)$

ومنه : $S=\left[-1,\dfrac{Ln2}{Ln3}\right]$.

5)- الإجابة صحيحة لأن : .... (01ن)

$y'+3y-2=0$ يكافئ : $y'=-3x+2$ ، $y=ce^{-3x}+\dfrac{2}{3}\quad (c\in\mathbb{R})$

$f(0)=\dfrac{-1}{3}$ يكافئ : $c+\dfrac{2}{3}=\dfrac{-1}{3}$ أي أن : $c=-1$. ومنه : $f(x)=-e^{-3x}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{-1}{e^{3x}}+\dfrac{2}{3}$

التمرين الثاني: (06 نقاط)

1)- أ)- $g(0)=-4$ $g(-1)=0$ .... (0.25ن) (0.25ن)

$(T)\ni A(0,-4)$ ، $(T)\ni B(-2,0)$ ، $g'(0)=\dfrac{4-0}{0-2}=-2$ .... (0.25ن)

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ .... (0.25ن) (0.25ن)

ب)- $(T):y=-2x-4$ .... (0.5ن)

جـ)- جدول إشارة $g(x)$: .... (0.25ن)

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
إشارة $g(x)$:		+	0	-	

جدول إشارة $g'(x)$: .... (0.25ن)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
إشارة : $g'(x)$	-	0	+

د)- $Ln(m) \in]-4,0[$ ومنه : $m \in]e^{-4},1[$ .... (0.5ن)

2)- $g(0) = -4$ معناه : $b = -4$ . ... (0.25ن)

$g(-1) = 0$ معناه : $(-a+b)e^{\frac{1}{2}} = 0$ ومنه : $a = b = -4$ .... (0.25ن)

3)- أ)- $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} -8(x+3) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{-x}{2}} = +\infty \end{cases}$ ومنه : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ .... (0.5ن)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 16\left(\frac{-x}{2}\right)e^{\frac{-x}{2}} - 24e^{\frac{-x}{2}} = 0$ .... (0.25ن)

ب)- f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$: .... (0.25ن)

ومنه : $f'(x) = -8e^{\frac{-x}{2}} + 4(x+3)e^{\frac{-x}{2}} = (-8+4x+12)e^{\frac{-x}{2}} = (4x+4)e^{\frac{-x}{2}}$

$f'(x) = -g(x)$ - إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$:

fمتناقصة تماما على المجال : $]-\infty,-1]$ ، f متزايدة تماما على المجال : $[-1,+\infty[$ .... (0.5ن)

جدول تغيرات الدالة f : .... (0.5ن)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-16\sqrt{e}$	↗ 0

جـ)- f' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$: $f''(x) = -g'(x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
إشارة : $f''(x)$	+	0	-

- ومنه : (C_f) يقبل نقطة إنعطاف $W\left(1, f(1)\right)$. $f(1) = -32e^{\frac{-1}{2}}$ ....(0.5ن)

$(D) : y = 8e^{\frac{-1}{2}}(x-1) - 32e^{\frac{-1}{2}} = 8e^{\frac{-1}{2}}x - 40e^{\frac{-1}{2}}$ ....(0.25ن)

التمرين الثلث: (08 نقاط)

I)-1)- $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} g(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} g(x) = -\infty$ ....(0.5ن)

2)- g قابلة للإشتقاق على D : $g'(x) = -1 - \frac{1}{x} \prec 0$ ومنه : g متناقصة تماما على D . ...(0.5ن)

3)- g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[2,3]$ ، $g(2) \times g(3) \prec 0$ و منه : حسب مبرهنة القيمة المتوسطة للمعادلة :
$g(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث : $\alpha \in]2,3[$ ($g(2) \approx 0.3$ ، $g(3) \approx -1.1$) ....(0.5ن)

إشارة $g(x)$: ....(0.5ن)

x	0 α $+\infty$
إشارة : $g(x)$	+ 0 -

II)- 1)- $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{-xLnx + Lnx - 2}{x} = -\infty$ ....(0.5ن)

(C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته : $x = 0$ . ...(0.25ن)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left[-Lnx + \frac{Lnx}{x} - \frac{2}{x}\right] = -\infty$ ....(0.25ن)

2)- f قابلة للإشتقاق على D :

$$f'(x) = \frac{-1}{x} + \frac{\frac{1}{x} \times x - (Lnx - 2)}{x^2} = \frac{-x + 1 - Lnx + 2}{x^2} = \frac{-x + 3 - Lnx}{x^2}$$

ومنه : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ....(0.5ن)

f متناقصة تماما على المجال $[\alpha, +\infty[$ ، f متزايدة تماما على المجال $]0, \alpha]$ . ...(0.5ن)

جدول تغيرات الدالة f : ....(ن0.5)

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

3)- $g(\alpha)=0$ يكافئ: $Ln\alpha=-\alpha+3$.

$f(\alpha)=\alpha-3+\frac{3-\alpha-2}{\alpha}=\alpha-3-1+\frac{1}{\alpha}=\alpha-4+\frac{1}{\alpha}$ ....(ن0.5)

4)- أ)- $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-h(x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{Lnx}{x}-\frac{2}{x}\right]=0$ ....(ن0.25)

(C_h) منحنى مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ . ...(ن0.25)

ب)- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (C) : ....(ن0.5)

$f(x)-h(x)=\frac{Lnx-2}{x}$

$f(x)-h(x)=0$ يكافئ: $x=e^2$. إشارة $f(x)-h(x)$ من إشارة $Lnx-2$ على D لأن: $x\succ 0$.

x	0		e^2		$+\infty$
$f(x)-h(x)$		-	0	+	
الوضعية :		(C_f) تحت $(C)_h$		(C_f) فوق (C_h)	

$(C_f)\cap(C_h)=\{A(e^2,-2)\}$

III)- أ)- من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $-x\in\mathbb{R}^*$: $k(-x)=k(x)$ (لأن: $|-x|=|x|$) و منه :

الدالة k زوجية ....(ن0.25)

ب)- على المجال $]0,+\infty[$: $k(x)=f(x)$ ومنه : (C_k) يطابق (C_f) .

- على المجال $]-\infty,0[$: نرسم نظير الجزء السابق بالنسبة لـ (yy') لأن الدالة k زوجية . ...(ن0.5)

جـ)- إنشاء (C_h) ، (C_f) و (C_k) : ....(1.25ن)