اختبار الفصل الأول

تمرين 1 (4نقاط)

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 وأربع كريات سوداء تحمل الأرقام 2 ، 2 ، 2 ، 3 وخمس كريات خضراء تحمل الأرقام 4 ، 4 ، 5 ، 5 ، 5. (لا نفرق بينها عند اللمس)

نسحب من هذا الكيس كريتين في آن واحد بطريقة عشوائية.

1) A و B حادثتان حيث: A: "سحب كريتين إحداهما سوداء تحمل الرقم 2 والثانية لونها مختلف"، وB: "سحب كريتين تحملان رقمين مجموعهما أكبر تماما من 3". بيّن أنّ $P(\text{A})=\dfrac{4}{11}$ و $P(\text{B})=\dfrac{19}{22}$ ، ثم استنتج حساب $P(\text{A}\cup\text{B})$.

2) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب الرقم الأكبر بين رقمي الكرتين المسحوبتين، والرقم 6 إذا كانت الكريتان تحملان نفس الرقم.

أ) عيّن مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X ، ثم بيّن أنّ: $P(X=4)=\dfrac{7}{33}$ و $P(X=6)=\dfrac{1}{6}$.

ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثم احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

3) نجري الآن n سحبة متتالية لكرية بحيث نعيد في كل مرة الكرية المسحوبة إلى الكيس.

أ) عبّر بدلالة العدد الطبيعي n الاحتمال P_n للحصول على الكريات البيضاء فقط ، ثم عيّن أكبر قيمة للعدد n بحيث يكون $P_n\geq 0{,}002$.

ب) احسب احتمال سحب كرية واحدة فقط بيضاء.

تمرين 2 (4نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=-3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+8}-4$.

1) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $-3\leq u_n<-2$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=-\dfrac{(u_n+2)(u_n+4)}{\sqrt{2u_n+8}+u_n+4}$. استنتج اتّجاه تغيّر (u_n) وتقاربها.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}+2\geq(2-\sqrt{2})(u_n+2)$.

ب) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0>u_n+2\geq-\left(2-\sqrt{2}\right)^n$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول v_0 ، ومن أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=\dfrac{1}{2^n}\ln\left(\dfrac{u_n+4}{2}\right)$.

أ) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية، أساسها $q=\dfrac{1}{4}$ ، يطلب كتابة حدّها العام بدلالة n.

ب) نضع $P_n=(u_0+4)\times(u_1+4)\times\ldots\times(u_n+4)$. بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $P_n=2^{2^{-n}+n-1}$.

تمرين 3 (5نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. M نقطة لاحقتها العدد المركب z ، حيث $z=x+iy$ ،

x و y عددين حقيقيين. نرفق بكل عدد مركب z حيث $z\neq -i$ العدد المركب Z: $Z=\dfrac{iz+5}{z+i}$.

1) بيّن أنّ الكتابة الجبرية للعدد المركب Z هي: $Z=\dfrac{6x}{x^2+(y+1)^2}+i\dfrac{x^2+y^2-4y-5}{x^2+(y+1)^2}$.

2) عيّن وأنشئ المجموعة E_1 للنقط M من المستوي حتى يكون Z عددا تخيليا صرفا.

3) عيّن وأنشئ المجموعة E_2 للنقط M من المستوي حتى يكون Z عددا حقيقيا، مع ذكر العناصر المميّزة لـE_2.

4) عيّن وأنشئ المجموعة E_3 للنقط M من المستوي حتى تكون طويلة $Z+i$ تساوي 2 بمعنى $|Z+i|=2$.

5) عيّن وأنشئ المجموعة E_4 للنقط M من المستوي بحيث يتحقّق $Z=\overline{z}$.

تمرين 4 (7نقاط)

I- g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-\infty;+\infty[$ بـ: $g(x)=x(x-2-e^{-x})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

2) بيّن أنّ: $g'(x)=(x-1)(e^{-x}+2)$ ، ادرس إشارتها ثم شكّل جدول تغيرات الدالة g.

3) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين، أحدهما معدوم والآخر α حيث $2{,}1<\alpha<2{,}2$. استنتج إشارة $g(x)$.

II- f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=x+\dfrac{e^{-x}+1}{x-1}$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)$. فسّر نتيجتي النهايتين هندسيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وبيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

ج) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلته.

2) أ) بيّن أنّ: من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$. استنتج اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

ب) ليكن (T) المماس للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة β. بيّن أنّ المماس (T) يشمل النقطة A حيث $A(1,0)$

إذا تحقّق: $(\beta+1)(e^{-\beta}+1)=0$. استنتج أنّ معادلة المماس (T) هي: $y=\dfrac{3+e}{4}(x-1)$.

3) أ) بيّن أنّ $f(\alpha)=\alpha+1$ ، ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب) احسب $f(-2)$ ، ثم ارسم المستقيم المقارب (Δ) ، المماس (T) والمنحني $(\mathscr{C})$.

4) m وسيط حقيقي، ولتكن f_m الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f_m(x)=x+\dfrac{e^{-x}+m}{x-1}$ و $(\mathscr{C}_m)$ تمثيلها البياني.

أ) p و q عددين حقيقيين موجبين تماما حيث $p<q$. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathscr{C}_p)$ و $(\mathscr{C}_q)$.

ب) عيّن قيمة العدد الحقيقي m حتى تكون الدالة f_m هي حل للمعادلة التفاضلية: $(x-1)y'+x(y-1)=x^2$.

تصحيح إختبار الفصل الأول 2021م

"عبد المطلب"

تمرين 1:

(1 $P(A)=\frac{C_3^1\times C_8^1}{C_{12}^2}=\frac{4}{11}$

$P(B)=1-P(\bar{B})=1-\frac{C_2^1C_4^1+C_2^2}{C_{12}^2}=1-\frac{3}{22}=\frac{19}{22}$

أو $P(B)=\frac{C_{10}^2+C_2^1\times C_{10}^1}{C_{12}^2}$ (أعبر)

(2 أ) $X=\{2,3,4,5,6\}$

$P(X=4)=\frac{C_2^1\times C_7^1}{C_{12}^2}=\frac{7}{33}$

$P(X=6)=\frac{C_2^2+C_4^2+C_2^2+C_3^2}{66}=\frac{1}{6}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-\frac{C_3^1\times C_2^1}{66}=\frac{21}{22}$

أو: $P(A\cap B)=1-\frac{3}{66}$

ب) قانون الاحتمال للمتغير X:

x_i	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{33}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{7}{33}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{6}$

$E(X)=2\times\frac{4}{33}+\frac{3}{11}+4\times\frac{7}{33}+5\times\frac{9}{22}+\frac{6}{6}=\frac{97}{22}=4,409$

(3 أ) $P_n=\frac{3^n}{12^n}=\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$P_n\geq 0,002$ يعني: $\frac{1}{4^n}\geq 0,002$ أي: $4^n\leq 500$

$\ln 4^n\leq \ln 500$ ، $n\leq\frac{\ln 500}{\ln 4}$ ، $n\leq 4,48$

ومنه: $n=4$

ب) $P=n\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=\frac{n}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n$

أو: $P=n\left(\frac{1^1\times 3^{n-1}}{12^n}\right)=n\left(\frac{3^{n-1}}{4^n}\right)$

تمرين 2:

(1 أ) $n=0$: $u_0=-3$ ومنه $-3\leq u_0<-2$ (محققة)

نفرض أن: $-3\leq u_n<-2$ ونبرهن صحة: $-3\leq u_{n+1}<-2$

لدينا: $-3\leq u_n<-2$ ، $-6\leq 2u_n<-4$ ،

$2\leq 2u_n+8<4$ ؛ $\sqrt{2}\leq\sqrt{2u_n+8}<2$

$\sqrt{2}-4\leq\sqrt{2u_n+8}-4<-2$ و $-3\leq\sqrt{2}-4$

ومنه: $-3\leq u_{n+1}<-2$ ، إذن: $-3\leq u_n<-2, \forall n\in\mathbb{N}$

ب) $u_{n+1}-u_n=\sqrt{2u_n+8}-4-u_n=\frac{(\sqrt{2u_n+8}-4-u_n)(\sqrt{2u_n+8}+4+u_n)}{\sqrt{2u_n+8}+4+u_n}$

$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n+8-(4+u_n)^2}{\sqrt{2u_n+8}+4+u_n}=\frac{2(u_n+4)-(u_n+4)^2}{\sqrt{2u_n+8}+4+u_n}$

$u_{n+1}-u_n=-\frac{(u_n+2)(u_n+4)}{\sqrt{2u_n+8}+4+u_n}>0$

لأن: $-3\leq u_n<-2$ ومنه: $1\leq u_n+4<2$ (موجب)

و: $-1\leq u_n+2<0$ (سالب)

إذن (u_n) متزايدة

u_n متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

(2 أ) لدينا: $u_{n+1}+2=\sqrt{2u_n+8}-2=\frac{(\sqrt{2u_n+8}-2)(\sqrt{2u_n+8}+2)}{\sqrt{2u_n+8}+2}$

$u_{n+1}+2=\frac{2(u_n+2)}{\sqrt{2u_n+8}+2}$

إذن: $u_{n+1}+2\geq(2-\sqrt{2})(u_n+2)$ تكافئ:

$\frac{2(u_n+2)}{\sqrt{2u_n+8}+2}\geq(2-\sqrt{2})(u_n+2)$

$u_n+2<0$

أي: $\frac{2}{\sqrt{2u_n+8}+2}\leq 2-\sqrt{2}$

لدينا سابقا: $\sqrt{2}\leq\sqrt{2u_n+8}<2$ ومنه،

$2+\sqrt{2}\leq\sqrt{2u_n+8}+2<4$ وعند استعمال المقلوب ثم نضرب في 2.

$\frac{1}{2}<\frac{2}{\sqrt{2u_n+8}+2}\leq\frac{2}{2+\sqrt{2}}$

لدينا: $\frac{2}{2+\sqrt{2}}=\frac{2(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=2-\sqrt{2}$

ومنه: $\frac{2}{\sqrt{2u_n+8}+2}\leq 2-\sqrt{2}$ أي $u_{n+1}+2\geq(2-\sqrt{2})(u_n+2)$

ب) $n=0$: $0>u_0+2\geq-(2-\sqrt{2})^0$ أي $0>-1\geq-1$ (محققة)

نفرض أن: $0>u_n+2\geq-(2-\sqrt{2})^n$

ونبرهن صحة: $0>u_{n+1}+2\geq-(2-\sqrt{2})^{n+1}$

لدينا: $(2-\sqrt{2})\times\left[0>u_n+2\geq-(2-\sqrt{2})^n\right]$

$0>(2-\sqrt{2})(u_n+2)\geq-(2-\sqrt{2})^{n+1}$

وبما أن: $u_{n+1}+2\geq(2-\sqrt{2})(u_n+2)$

ومنه: $0>u_{n+1}+2\geq-(2-\sqrt{2})^{n+1}$ ،

إذن: $\forall n\in\mathbb{N}$: $0>u_n+2\geq-(2-\sqrt{2})^n$

لدينا: $-1<2-\sqrt{2}<1$ ومنه: $\lim_{n\to+\infty}(2-\sqrt{2})^n=0$

باستعمال مبرهنة الحصر: $\lim_{n\to+\infty}(u_n+2)=0$

ومنه: $\lim_{n\to+\infty}u_n=-2$

(3 أ) $v_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(\frac{u_{n+1}+4}{2}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(\frac{\sqrt{2u_n+8}}{2}\right)$

$v_{n+1}=\frac{1}{2\times 2^n}\ln\left(\frac{2u_n+8}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^n}\ln\left(\frac{u_n+4}{2}\right)=\frac{1}{4}v_n$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ، $v_0=-\ln 2$

$v_n=v_0q^n=-\ln 2\left(\frac{1}{4}\right)^n$

ب) $\ln\left(\frac{u_n+4}{2}\right)=2^nv_n$ ومنه: $(u_n+4)=2e^{2^nv_n}$

$(u_n+4)=2e^{2^n\left(\frac{-\ln 2}{4^n}\right)}=2\left(e^{-\ln 2}\right)^{\frac{1}{2^n}}=2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}}$

$P_n=2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^0}}\times 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^1}}\times\dots\times 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}}=2^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\dots+\frac{1}{2^n}}$