التمرين الأول (05 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z : $z^2-2z+4=0$.

2. في المستوي المنسوب لمعلم متعامد و متجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب :
$z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=-\overline{z_A}$ و $z_C=-2\left(cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3}\right)$.

أ . أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل المثلثي .

ب . استنتج أنّ النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي يطلب تعيين مركزها و طول نصف قطرها .

3. أ . تحقق أنّ : $z_C-z_B=-i\sqrt{3}(z_A-z_B)$

ب . استنتج نوع المثلث ABC.

4. أكتب على الشكل الجبري ثمّ المثلث العدد المركب $\frac{z_A}{1+i}$ ، ثمّ استنتج القيمتين المضبوطتين للعددين $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

5. عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_A}{1+i}\right)^n$ حقيقيا سالبا .

التمرين الثاني (04 نقاط)

يحتوي كيس U_1 على كرتين مرقمة بـ : 1 و 2.

و يحتوي كيس U_2 على ثلاث كرات سوداء و سبع كرات بيضاء .

نسحب عشوائيا كرة واحدة من U_1 ، إذا ظهر الرقم 1 نسحب كرة واحدة من U_2 و إذا ظهر الرقم 2 نسحب كرتين على التوالي بدون إرجاع من U_2 .

نعتبر الحادثتين A : " سحب كرتين بيضاوين " ، B : " سحب كرتين مختلفتي اللون "

1. أ . أنجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه التجربة .

ب . بيّن أنّ : $P(A)=P(B)=\frac{7}{30}$.

2. α عدد طبيعي غير معدوم . نعتبر اللعبة التالية : إذا سحبنا كرة بيضاء نربح 3 نقط و إذا سحبنا كرة سوداء نخسر 2α .

ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل نتيجة سحب مجموع النقط المتحصل عليها .

أ . برّر أنّ قيم المتغير العشوائي X هي : $\{3\ ;\ -2\alpha\,;6\ ;\ -4\alpha\,;3-2\alpha\}$.

ب . عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X .

جـ . بيّن أنّ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X هو $E(X)=\frac{63-18\alpha}{20}$ ، استنتج قيمة α حتى تكون اللعبة مربحة

د . استنتج في هذه الحالة قيمة $E(2024X-1445)$.

التمرين الثالث (04 نقاط)

(U_n) متتالية عددية معرفة بـ: $U_0=0$ و $U_1=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+2}=\frac{2}{5}U_{n+1}-\frac{1}{25}U_n$.

1. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n=U_{n+1}-\frac{1}{5}U_n$ و $W_n=5^nU_n$.

أ . برهن أنّ (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{5}$ ثمّ أعط عبارة V_n بدلالة n .

ب . برهن أنّ (W_n) متتالية حسابية أساسها 5 ثمّ أعط عبارة W_n بدلالة n .

2. أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=U_0+5U_1+5^2U_2+5^3U_3+\cdots+5^nU_n$

و الجداء : $P_n=\left(V_1-\frac{V_1}{2}\right)\left(V_2-\frac{V_2}{3}\right)\left(V_3-\frac{V_3}{4}\right)\ldots\left(V_n-\frac{V_n}{n+1}\right)$

3. أ . بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0<U_{n+1}\le\frac{2}{5}U_n$.

ب .استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0<U_n\le\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ ثم استنتج $lim_{n\to+\infty}U_n$.

التمرين الرابع (07 نقاط)

[1]. لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=-2x^2+2-lnx$.

أ . أدرس تغيرات الدالة g .

ب . استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ (لاحظ أنّ $g(1)=0$)

[2]. نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{-1+lnx}{x}-2x+2e$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ حيث $\|\vec{\imath}\|=2cm$.

1. أدرس تغيرات الدالة f ثمّ شكل جدول تغيراتها.

2. أثبت أنّ المستقيم (d) ذو المعادلة $y=-2x+2e$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثمّ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d).

3. أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0{,}4\,;0{,}5[$ ثمّ أرسم (d) و (C_f) .

4. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $\frac{-1+lnx}{x}=m-2e$.

5. أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (d) و المستقيمين $x=1$ و $x=e$.

التمرين الأول (05نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z : $(z+1)(z^2-4z+7)=0$.

2. في المستوي المنسوب لمعلم متعامد و متجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب :

$z_A=-1$ ، $z_B=2+i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$.

أ . أكتب العدد المركب (z_B-z_A) على الشكل المثلثي .

ب. استنتج قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $(z_B-z_A)^n$ عددا حقيقا سالبا .

3. أ . أكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل المثلثي .

ب . استنتج نوع المثلث ABC.

جـ . استنتج مركز و نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

4. عيّن مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق : $z=z_A+ke^{i\frac{\pi}{4}}$ و k يمسح $\mathbb{R}^*$.

التمرين الثاني (04نقاط)

يحتوي كيس U_1 على 10 كرات منها 5 بيضاء و 3 سوداء و 2 خضراء .

و يحتوي كيس U_2 على 7 كرات منها 4 حمراء و 3 كرات خضراء (الكرات لا نفرق بينها باللمس) ثمّ نقوم بثلاث تجارب :

1] التجربة الأولى : نسحب عشوائيا و في آن واحد 4 كرات من الصندوق U_1 .

و نعتبر الحادثتين : A : " من بين الكرات الأربعة توجد كرة واحدة خضراء فقط "

B : " من بين الكرات الأربعة توجد بالضبط ثلاث كرات من نفس اللون "

أ . بيّن أنّ $(A)=\frac{8}{15}$ و $P(B)=\frac{19}{70}$.

ب . n عدد طبيعي غير معدوم ، نفرض أنّ سحب كرة بيضاء يعطي ربح n نقطة و ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب مجموع النقط المتحصل عليها .

- عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X .

- جد قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون $E(X)=4048$.

2] التجربة الثانية : نضع كل كرات الكيسين U_1 و U_2 في كيس ثالث U_3 ثمّ نسحب 4 كرات في آن واحد .

ما هو احتمال أن تحمل الكرات الأربعة ألوان علم فلسطين ؟

3] التجربة الثالثة : نسحب عشوائيا على التوالي و بدون إرجاع ثلاث كرات من U_3 .

لتكن الحادثة C : " الكرات الثلاثة تحمل ألوان العلم الوطني " . أحسب $P(C)$.

التمرين الثالث (04 نقاط)

(U_n) متتالية عددية معرفة بـ : $U_1 = -1$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$.

1. أ . برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_n \le 3$.

ب . أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثمّ استنتج أنها متقاربة.

جـ . أحسب $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

2. لتكن المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $V_n = n(3-U_n)$.

أ . بيّن أنّ (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول V_1 .

ب . أكتب كلا من V_n و U_n بدلالة n .

جـ . أحسب بدلالة n : $S_n = \frac{V_1}{3-U_1} + \frac{V_2}{3-U_2} + \frac{V_3}{3-U_3} + \cdots + \frac{V_n}{3-U_n}$ و $T_n = U_1 + 2U_2 + 3U_3 + \cdots + nU_n$.

التمرين الرابع (07 نقاط)

[1] g الدالة المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = e^{-2x} - 4x - 2$.

1. أدرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ (حساب النهايات غير مطلوب)

2. أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدًا α حيث $-0.16 < \alpha < -0.15$. ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

[2] . لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x + 3 - 2xe^{2x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ ، وحدة الطول $2cm$.

1. أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2. بيّن أنّ المنحني (C_f) يقبل المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x + 3$ مقارب مائل ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (d).

3. أرسم المستقيم (d) والمنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha) \approx 3,07$) .

4. أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا موازيا للمستقيم (d) يطلب تعيين معادلة له .

5. أ. باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب : $\int_{-2}^{0} 2xe^{2x}dx$.

ب . أحسب بـ cm^2 مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (d) و المستقيمين $x = -2$ و $x = 0$.