ثانوية : جلول بلخير بأولاد محمد شلف — السنة الدراسية : 2023/2022

الشعبة : 3 علوم تجريبية — المدة : 3 سا و 30 دقيقة

اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول :

1) نعرف الدالة العددية f على المجال $[1;7]$ بالعبارة : $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{7}{x}\right)$ ، ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. الوحدة على المحورين $2cm$.

أ) ادرس تغيرات الدالة f .

ب) أنشئ المنحنى البياني (C_f) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ في نفس المعلم .

2) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $U_0=7$ والعبارة : $U_{n+1}=\frac{1}{2}\left(U_n+\frac{7}{U_n}\right)$.

أ) احسب U_1 ، U_2.

ب) استعمل المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) لتمثيل الحدود U_0 ، U_1 و U_2 على محور الفواصل.

3) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\sqrt{7}<U_n\leq 7$.

ب) بين أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما ، ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (U_n) ؟

4) أ) برهن أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن : $\left(U_{n+1}-\sqrt{7}\right)\leq\frac{1}{2}\left(U_n-\sqrt{7}\right)$.

ب) استنتج أن : $\left(U_n-\sqrt{7}\right)\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(U_0-\sqrt{7}\right)$ ، ماهي $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ ؟

التمرين الثاني :

أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة :

1) كيس به كريات متماثلة لا نميز بينها عند اللمس منها 4 بيضاء و 6 حمراء ، نسحب من الكيس في آن واحد 3 كريات خمس مرات على التوالي مع الإرجاع . احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء مرتين بالضبط هو : $\left(\frac{C_6^3}{C_{10}^3}\right)^3\left(\frac{C_4^3}{C_{10}^3}\right)^2$.

2) عدد أرقام العدد 2022^{2023} هو : 6688 .

3) الدالة f القابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ والتي تحقق : $f'(x)=-2f(x)+3$ و $f'(1)=2$ هي : $f(x)=-e^{-2x+2}+\frac{3}{2}$.

4) علما أن الدالة $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة اصلية للدالة $x\mapsto\ln x$ فإن : $\int_1^e(\ln x)^2\,dx=e-1$.

5) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=|x+1|\ln\left(e^x+1\right)$ قابلة للاشتقاق عند -1.

التمرين الثالث :

يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة لانفرق بينها باللمس، منها أربع كريات بيضاء مرقمة بـ : 1 ، 2 ، 2 ، 3 وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ : 2 ، 2 ، 3 ، وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ : 2 ، 3 ، 3 .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق.

نعتبر الحادثتين A : "الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني "

و B : " الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم "

1) أ) احسب : $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب.

ب) بين أن : $P(A \cap B)=\frac{1}{20}$ ثم استنتج $P(A \cup B)$.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا.

❖ عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الرابع :

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2-2x-4\ln(x-1)$.

1) ادرس تغيرات الدالة g . (نأخذ : $g(1+\sqrt{2}) \approx -0.386$)

2) احسب $g(2)$ ، ثم بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $2.87<\alpha<2.88$.

3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $]1;+\infty[$.

II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-3+\frac{4\ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. الوحدة على المحورين $1cm$.

1) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا ، ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)؛ ثم ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

3) بين أنه من أجل كل x من $]1;+\infty[$ لدينا : $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

4) ارسم (Δ) و (C_f). (نأخذ : $f(\alpha)\approx 3.9$)

5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=|m|$.

6) ليكن λ عدد حقيقي حيث : $2 \le \lambda$ نضع $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=2$ و $x=\lambda$ ، احسب $A(\lambda)$ ، ثم عين قيمة λ بحيث : $A(\lambda)=12cm^2$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

نعرف المتتاليتين (U_n) و (V_n) بـ : $U_0=1$ ، $V_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1}=\frac{U_n+2V_n}{3}$ ، $V_{n+1}=\frac{U_n+4V_n}{5}$.

1) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $W_n=U_n-V_n$.

- ❖ برهن أن المتتالية (W_n) هندسية ، ثم عين نهايتها ثم عبر عن W_n بدلالة n.

2) عبر عن $U_{n+1}-U_n$ و $V_{n+1}-V_n$ بدلالة W_n ، استنتج اتجاه تغير المتتاليتين (U_n) و (V_n).

3) بين أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) لهما نفس النهاية يرمز لها l.

4) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $T_n=3U_n+10V_n$.

- ❖ برهن أن المتتالية (T_n) ثابتة ، ثم استنتج قيمة l.

5) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=U_0+U_1+\cdots+U_n$.

- ❖ احسب بدلالة n المجموع : S_n .

التمرين الثاني :

تتكون مجموعة أشخاص من ثمانية رجال وأربع نساء من بينهم رجل واحد اسمه عمر وإمراه واحدة اسمها مريم نريد تشكيل لجنة مكونة من ثلاث أعضاء لهم نفس المهام.

1) احسب احتمال كل من الاحداث التالية :

A "تكوين لجنة تضم ثلاث رجال"

B "تكوين لجنة تضم رجلا وإمراتين"

C "تكوين لجنة تضم عمر"

D "تكوين لجنة تضم إما عمر وإما مريم"

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل اختيار عدد الرجال في اللجنة المكونة

- ❖ عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله .

التمرين الثالث :

لكل سؤال من الأسئلة التالية إجابة واحدة فقط صحيحة عينها مع التبرير

1) لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

المنحنى (C_f) : أ) يقبل نقطة إنعطاف واحدة فقط ب) يقبل نقطتي إنعطاف ج) لايقبل نقطة إنعطاف

2) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{x-1}$ ، من أجل كل عدد طبيعي n نعتبر المتتالية (I_n) حيث : $I_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$.

(I_n) هي متتالية : أ) هندسية ب) حسابية ج) لا هندسية ولا حسابية

3) لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_0=-3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=\frac{9}{6-U_n}$

المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n=\frac{1}{U_n-3}$: أ) حسابية أساسها 5 ب) حسابية اساسها $-\frac{1}{3}$ ج) حسابية اساسها 9

4) لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=2^{-\frac{3}{x}}$

الدالة f : أ) متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ ب) متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ج) ليست رتيبة على $]0;+\infty[$

5) ليكن العدد الحقيقي : $K=\int_{2}^{4}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx$

القيمة المضبوطة للعدد K هي : أ) $K=5\ln5-4\ln3$ ب) $K=5\ln5$ ج) $K=5\ln5-6\ln3$

التمرين الرابع :

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1-e^{2x}-2xe^{2x}$.

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x+3-xe^{2x}$ ؛ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. الوحدة على المحورين $1cm$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

2) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)؛ ثم ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

3) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x)=g(x)$ ؛ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

4) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) موازي للمستقيم (Δ) يطلب تعين معادلة له .

5) بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β حيث : $-3.5<\alpha<-3$ و $0.5<\beta<1$.

6) ارسم (Δ)، (T) و (C_f).

7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=x+m$.

8) ليكن λ عدد حقيقي حيث : $\lambda\leq 0$ نضع $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=\lambda$ و $x=0$ ؛ احسب $A(\lambda)$ ؛ ثم عين $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)$.

III) لتكن h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x)=\frac{1+3x-e^{\frac{2}{x}}}{x}$

1) بين أن من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $h(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

2) احسب $h'(x)$ ثم ادرس اتجاه تغير الدالة h.

انتهى الموضوع الثاني

عناصر الإجابة	العلامة	
	مجزأة	المجموع

الموضوع الأول

التمرين الأول 05 نقاط

1) لدينا الدالة : 1.25

$$f:[1;7]\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{7}{x}\right)$$

أ) f قابلة للاشتقاق على $[1;7]$:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{7}{x^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-7}{x^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x+\sqrt{7}\right)}{x^2}\right)$$ 0.25

جدول إشارة $f'(x)$:

x	1		$\sqrt{7}$		7
$x-\sqrt{7}$		$-$	0	$+$	
$x+\sqrt{7}$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

0.25

إذن الدالة f متناقصة تماما على $\left[1;\sqrt{7}\right]$ ومتزايدة تماما على $\left[\sqrt{7};7\right]$. 0.25

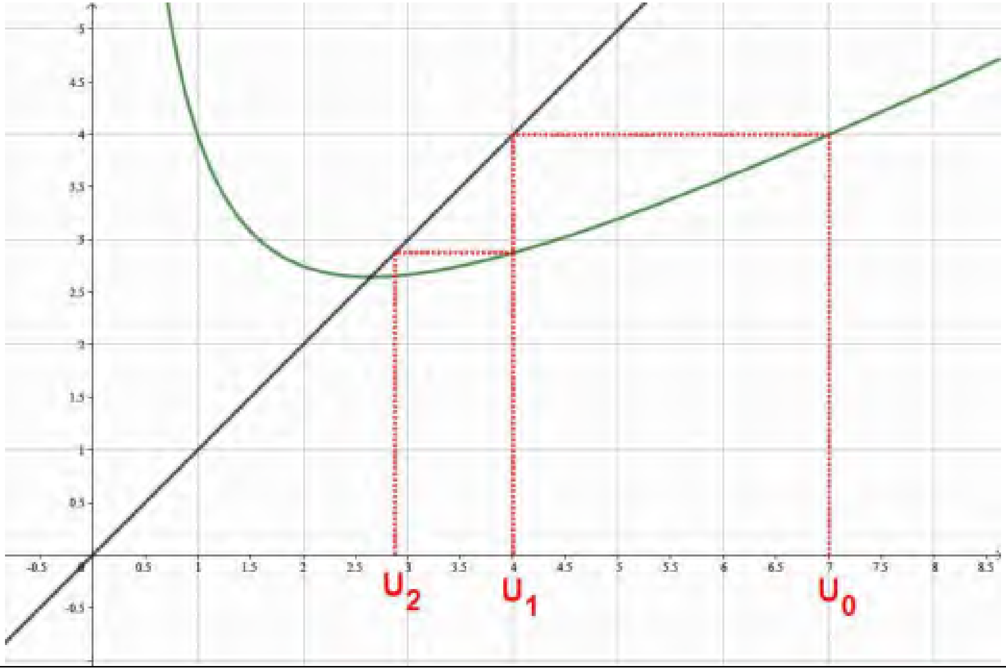
جدول تغيرات الدالة f :

x	1		$\sqrt{7}$		7
$f(x)$	4	↘	$\sqrt{7}$	↗	4

$$f(1)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{7}{1}\right)=4$$
$$f(7)=\frac{1}{2}\left(7+\frac{7}{7}\right)=4$$
$$f\left(\sqrt{7}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{7}+\frac{7}{\sqrt{7}}\right)=\sqrt{7}$$

0.25

ب) إنشاء $\left(C_f\right)$ والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$:



0.25

(2	لدينا المتتالية : $\begin{cases} U_0 = 7 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{7}{U_n}\right) \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$ أ) $U_1 = \frac{1}{2}\left(U_0 + \frac{7}{U_0}\right) = \frac{1}{2}\left(7 + \frac{7}{7}\right) = 4$ $U_2 = \frac{1}{2}\left(U_1 + \frac{7}{U_1}\right) = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{7}{4}\right) = \frac{23}{8}$ ب) إنشاء الحدود U_0، U_1 وU_2 على محور الفواصل : الإنشاء في نفس المعلم السابق	0.25 0.5	0.75
(3	أ) نسمي $P(n)$ الخاصية من أجل كل عدد طبيعي n : $P(n): \sqrt{7} < U_n \le 7$ التحقق من صحة $P(0)$: لدينا $U_0 = 7$ و $\sqrt{7} < 7 \le 7$ إذن $\sqrt{7} < U_0 \le 7$ إذن $P(0)$ محققة. نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $\sqrt{7} < U_n \le 7$ ولنثبت صحة $P(n+1)$ أي لنبرهن أن : $\sqrt{7} < U_{n+1} \le 7$ لدينا $\sqrt{7} < U_n \le 7$ بما أن الدالة f متزايدة تماما على $\left[\sqrt{7};7\right]$ فإن $f\left(\sqrt{7}\right) < f\left(U_n\right) \le f\left(7\right)$ إذن $\sqrt{7} < U_{n+1} \le 4$ إذن $\sqrt{7} < U_{n+1} \le 7$ إذن $P(n+1)$ صحيحة إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ أي : $\sqrt{7} < U_n \le 7$. ب) ليكن $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{7}{U_n}\right) - U_n = \frac{U_n^2 + 7}{2U_n} - \frac{2U_n^2}{2U_n} = \frac{-U_n^2 + 7}{2U_n} = \frac{\left(\sqrt{7} - U_n\right)\left(\sqrt{7} + U_n\right)}{2U_n}$ بما أن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $\sqrt{7} < U_n \le 7$ فإن $\sqrt{7} - U_n < 0$ و $0 < \sqrt{7} + U_n$ و $0 < 2U_n$ إذن $U_{n+1} - U_n < 0$ إذن المتتالية $\left(U_n\right)$ متناقصة تماما. بما أن المتتالية $\left(U_n\right)$ متناقصة تماما ومحدودة من أسفل بالعدد $\sqrt{7}$ إذن $\left(U_n\right)$ متتالية متقاربة .	0.75 0.75 0.25	1.75
(4	أ) ليكن $n \in \mathbb{N}$: $\left(U_{n+1} - \sqrt{7}\right) - \frac{1}{2}\left(U_n - \sqrt{7}\right) = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{7}{U_n}\right) - \sqrt{7} - \frac{1}{2}U_n + \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{U_n^2 + 7}{2U_n} - \frac{2\sqrt{7}U_n}{2U_n} - \frac{U_n^2}{2U_n} + \frac{\sqrt{7}U_n}{2U_n}$ $= \frac{U_n^2 + 7 - 2\sqrt{7}U_n - U_n^2 + \sqrt{7}U_n}{2U_n} = \frac{7 - \sqrt{7}U_n}{2U_n}$ لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $\sqrt{7} < U_n \le 7$ إذن $-7\sqrt{7} \le -\sqrt{7}U_n < -7$ إذن $7 - \sqrt{7}U_n < 0$ وبما أن $0 < 2U_n$ إذن $\left(U_{n+1} - \sqrt{7}\right) - \frac{1}{2}\left(U_n - \sqrt{7}\right) < 0$ إذن $\left(U_{n+1} - \sqrt{7}\right) \le \frac{1}{2}\left(U_n - \sqrt{7}\right)$. ب) لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $\left(U_{n+1} - \sqrt{7}\right) \le \frac{1}{2}\left(U_n - \sqrt{7}\right)$ وعلما أن : $0 < U_n - \sqrt{7}$ إذن $n = 0 \qquad 0 < \left(U_1 - \sqrt{7}\right) \le \frac{1}{2}\left(U_0 - \sqrt{7}\right)$ $n = 1 \qquad 0 < \left(U_2 - \sqrt{7}\right) \le \frac{1}{2}\left(U_1 - \sqrt{7}\right)$ $\vdots \qquad \vdots$ $n - 1 \qquad 0 < \left(U_n - \sqrt{7}\right) \le \frac{1}{2}\left(U_{n-1} - \sqrt{7}\right)$	0.5	1.25

	بضرب المتباينات طرفا لطرف نجد : $0<\left(U_n-\sqrt{7}\right)\le\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)-0+1}\left(U_0-\sqrt{7}\right)$ إذن $\left(U_n-\sqrt{7}\right)\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(U_0-\sqrt{7}\right)$. باستعمال خاصية النهايات والمقارنة فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}0\le\lim\limits_{n\to+\infty}\left(U_n-\sqrt{7}\right)\le\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(U_0-\sqrt{7}\right)$ إذن $0\le\lim\limits_{n\to+\infty}\left(U_n-\sqrt{7}\right)\le0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(U_n-\sqrt{7}\right)=0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\sqrt{7}$.	0.5 0.25	
	التمرين الثاني 03.75 نقاط		
(1	خطأ لأن : * عدد الحالات الممكنة عند سحب ثلاث كرات في آن واحد هو : C_{10}^3 * عدد الحالات الممكنة عند سحب ثلاث كرات في آن واحد خمس مرات على التوالي مع الإعادة هو : $\left(C_{10}^3\right)^5$ إذن احتمال الحصول على ثلاث كرات بيضاء مرتين بالضبط هو : $\frac{\left(C_4^3\right)^2\left(C_6^3+C_6^2\times C_4^1+C_6^1\times C_4^2\right)^3\times\left(\frac{5!}{(2!)(3!)}\right)}{\left(C_{10}^3\right)^5}=10\left(\frac{1}{30}\right)^2\left(\frac{29}{30}\right)^3$	0.25 0.5	0.75
(2	صحيح لأن : لدينا $\log\left(2022^{2023}\right)=2022\log\left(2023\right)\approx6687.59$ إذن $6687\le\log\left(2022^{2023}\right)<6688$ إذن $10^{6687}\le2022^{2023}<10^{6688}$ إذن عدد أرقام العدد 2022^{2023} هو 6688 رقم .	0.25 0.5	0.75
(3	صحيح لأن الدوال f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وتحقق $f'(x)=-2f(x)+3$ هي من الشكل $f(x)=Ce^{-2x}+\frac{3}{2}$ حيث C عدد حقيقي ثابت بما أن $f'(1)=2$ و $f'(x)=-2Ce^{-2x}$ إذن $f'(1)=-2Ce^{-2}=2$ معناه $C=-e^2$ إذن $f'(x)=-e^2e^{-2x}+\frac{3}{2}=-e^{-2x+2}+\frac{3}{2}$.	0.25 0.5	0.75
(4	خطأ لأن : باستعمال خاصية المكاملة بالتجزئة : $\int_1^e(\ln x)^2\,dx=\int_1^e(\ln x)(\ln x)dx=\left[(\ln x)(x\ln x-x)\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}\times(x\ln x-x)dx$ $\int_1^e(\ln x)^2\,dx=(\ln e)(e\ln e-e)-(\ln1)(1\ln1-1)-\int_1^e(\ln x-1)dx=\int_1^e(1-\ln x)dx=\left[(x-x\ln x+x)\right]_1^e$ $\int_1^e(\ln x)^2\,dx=(e-e\ln e+e)-(1-1\ln1+1)$ $\int_1^e(\ln x)^2\,dx=e-2$	0.25 0.5	0.75
(5	خطأ لأن : دراسة قابلية اشتقاق الدالة f على يمين وعلى يسار العدد -1 : $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1}\frac{\|x+1\|\ln\left(e^x+1\right)-0}{x+1}=\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1}\frac{(x+1)\ln\left(e^x+1\right)}{x+1}=\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1}\ln\left(e^x+1\right)=\ln\left(e^{-1}+1\right)$ $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}-1}\frac{\|x+1\|\ln\left(e^x+1\right)-0}{x+1}=\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}-1}\frac{-(x+1)\ln\left(e^x+1\right)}{x+1}=\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1}-\ln\left(e^x+1\right)=-\ln\left(e^{-1}+1\right)$ بما أن $\ln\left(e^{-1}+1\right)\ne-\ln\left(e^{-1}+1\right)$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند -1 .	0.25 0.5	0.75

التمرين الثالث 04.25 نقاط

1) نسحب في آن واحد ثلاث كريات إذن عدد الحالات الممكنة هو : $C_{10}^{3}=120$ 1.5

أ)

A : "الكريات المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني"

0.5 $$P(A)=\frac{C_4^1\times C_3^1\times C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$$

B : "الكريات المسحوبة لها نفس الرقم"

0.5 $$P(B)=\frac{C_5^3+C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{10+4}{120}=\frac{14}{120}=\frac{7}{60}$$

ب) $A\cap B$: "الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني ولها نفس الرقم"

0.25 $$P(A\cap B)=\frac{C_2^1\times C_2^1\times C_1^1+C_1^1\times C_1^1\times C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{2\times2\times1+1\times1\times2}{120}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$$

إستنتاج $P(A\cup B)$:

0.25 $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{36}{120}+\frac{14}{120}-\frac{6}{120}=\frac{44}{120}=\frac{11}{30}$$

2) ملاحظة في هذه المرحلة نهتم فقط بالأرقام المسجلة على الكرات 2.75

0.25 مجموعة قيم X الممكنة هي : $X\in\{0;1;2;3\}$

0.5 $$P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}$$

0.5 $$P(X=1)=\frac{C_5^1\times C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{5\times10}{120}=\frac{50}{120}$$

0.5 $$P(X=2)=\frac{C_5^2\times C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{10\times5}{120}=\frac{50}{120}$$

0.5 $$P(X=3)=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}$$

قانون احتمال المتغير العشوائي : 0.25

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{10}{120}$	$\frac{50}{120}$	$\frac{50}{120}$	$\frac{10}{120}$

الأمل الرياضياتي :

0.25 $$E(X)=\sum_{i=1}^{i=4}x_iP(X=x_i)=0\times\frac{10}{120}+1\times\frac{50}{120}+2\times\frac{50}{120}+3\times\frac{10}{120}=\frac{180}{120}=\frac{3}{2}=1.5$$

التمرين الرابع 07 نقاط

I) لدينا الدالة :

$$g:]1;+\infty[\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto g(x)=x^2-2x-4\ln(x-1)$$

1) دراسة تغيرات الدالة g : 1.25

0.25 $$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}x^2-2x-4\ln(x-1)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)\left(\frac{x^2-2x}{x-1}-4\frac{\ln(x-1)}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)\left(\frac{x-2}{1-\frac{1}{x}}-4\frac{\ln(x-1)}{x-1}\right)=+\infty$$

التبرير : $\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0$

0.25 $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} x^2-2x-4\ln(x-1)=+\infty$

التبرير : $\lim_{X \xrightarrow{>} 0} \ln X = -\infty$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$:

$$g'(x)=2x-2-4\left(\frac{1}{x-1}\right)=\frac{(2x-2)(x-1)-4}{x-1}=\frac{2x^2-2x-2x+2-4}{x-1}$$

0.25 $$g'(x)=\frac{2x^2-4x-2}{x-1}=\frac{2\left(x-\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\left(x-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)}{x-1}$$

جدول إشارة $g'(x)$:

x	1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$x-\left(1+\sqrt{2}\right)$	‖	$-$	0	$+$	
$x-\left(1-\sqrt{2}\right)$	‖	$+$		$+$	
$x-1$	‖	$+$		$+$	
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

0.25

0.25 إذن الدالة g متناقصة تماما على $]1;1+\sqrt{2}]$ ومتزايدة تماما على $[1+\sqrt{2};+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$g\left(1+\sqrt{2}\right)$	↗	$+\infty$

0.25

$$g\left(1+\sqrt{2}\right)=\left(1+\sqrt{2}\right)^2-2\left(1+\sqrt{2}\right)-4\ln\left(\left(1+\sqrt{2}\right)-1\right)=1+2+2\sqrt{2}-2-2\sqrt{2}-4\ln\left(\sqrt{2}\right)$$

$$g\left(1+\sqrt{2}\right)=1-2\ln 2\approx-0.386$$

(2 0.5 0.25 $g(2)=(2)^2-2(2)-4\ln(2-1)=4-4-4\ln(1)=0$

الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]2.87;2.88[$

وبما أن $g(2.87)\approx-0.006$ و $g(2.88)\approx0.009$ إذن $g(2.87)\times g(2.88)<0$

0.25 إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $\alpha\in]2.87;2.88[$.

(3 0.25 0.25 إشارة $g(x)$ حسب قيم x على المجال $]1;+\infty[$:

x	1		2		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

II) لدينا الدالة :

$$f:]1;+\infty[\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto f(x)=x-3+\frac{4\ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}$$

(1 0.75 0.25 $$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{>} 1} x-3+\frac{4\ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}=\lim_{x \xrightarrow{>} 1} x-3+\left(\frac{1}{x-1}\right)\left(4\ln(x-1)+5\right)=-\infty$$

التبرير: $\lim_{X \xrightarrow{>} 0} \ln X=-\infty$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{1}{x-1}=+\infty$

0.25 التفسير البياني للنتيجة : $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)=-\infty$ إذن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب عمودي لـ (C_f).

0.25

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-3+\frac{4\ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}=+\infty$$

التبرير: $\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0$ و $\lim_{x\to+\infty} x-3=+\infty$

(2 — 0.75

0.25

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-3)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4\ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}=0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-3$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ):

ليكن $x\in]1;+\infty[$: $f(x)-(x-3)=\frac{4\ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}=\frac{4\ln(x-1)+5}{x-1}$

لدينا $4\ln(x-1)+5\geq 0$ تكافئ $\ln(x-1)\geq\frac{-5}{4}$ تكافئ $x-1\geq e^{-\frac{5}{4}}$ تكافئ $x\geq e^{-\frac{5}{4}}+1$

جدول وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ):

x	1		$e^{-\frac{5}{4}}+1$		$+\infty$
$4\ln(x-1)+5$	‖	$-$	0	$+$	
$x-1$	‖	$+$		$+$	
$f(x)-(x-3)$	‖	$-$	0	$+$	
الوضعية بين (C_f) و (Δ).	‖	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	

$$(C_f)\cap(\Delta)=\left\{\left(e^{-\frac{5}{4}}+1;e^{-\frac{5}{4}}-2\right)\right\}$$

0.5

(3 — 1.25

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$:

$$f'(x)=1+4\left(\frac{\left(\frac{1}{x-1}\right)(x-1)-(1)\ln(x-1)}{(x-1)^2}\right)-\frac{5}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2+4(1-\ln(x-1))-5}{(x-1)^2}$$

0.5

$$f'(x)=\frac{x^2-2x+1+4-4\ln(x-1)-5}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-4\ln(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{g(x)}{(x-1)^2}$$

0.25

جدول إشارة $f'(x)$:

x	1		2		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$(x-1)^2$	‖	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

0.25

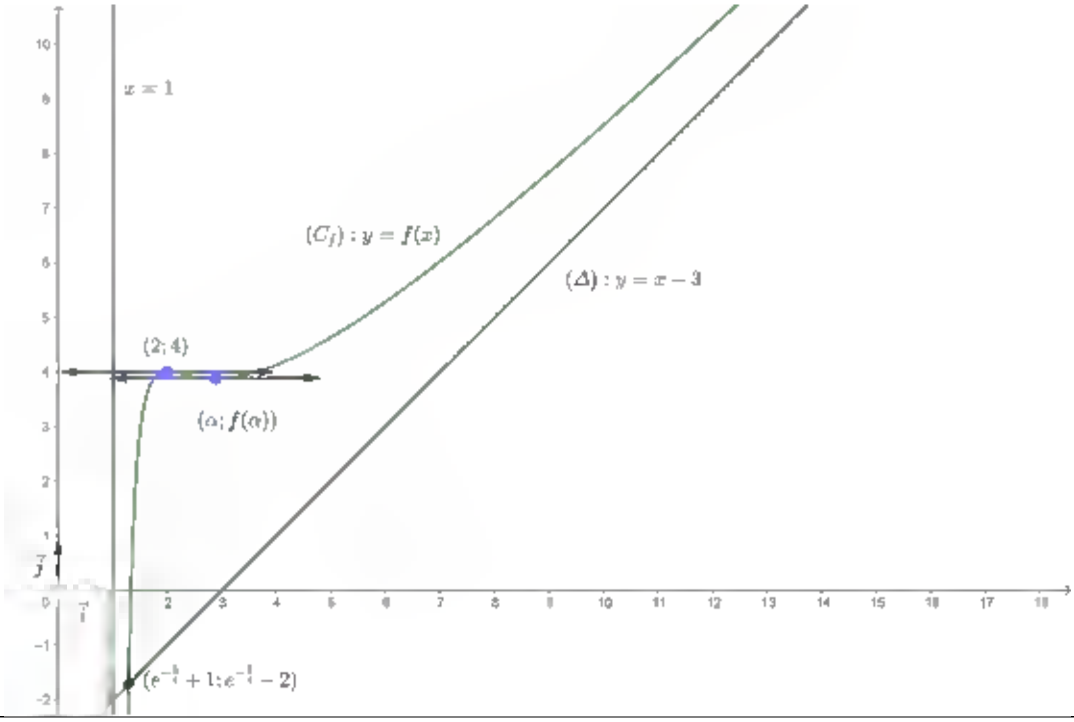
إذن الدالة f متزايدة تماما على $]1;2]$ ؛ متناقصة تماما على $[2;\alpha]$ و متزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f:

0.25

x	1		2		α		$+\infty$
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	4	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

$$g(2)=(2)-3+\frac{4\ln(2-1)}{(2)-1}+\frac{5}{(2)-1}=-1+5=4$$

4)	رسم (Δ) و (C_f):  	0.25 0.25	0.5
5)	حلول المعادلة $f(x)=\lvert m\rvert$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=\lvert m\rvert$. ملاحظة (مناقشة أفقية) في حالة $0\le\lvert m\rvert<f(\alpha)$ معناه $-f(\alpha)<m<f(\alpha)$ المعادلة لها حل وحيد. في حالة $\lvert m\rvert=f(\alpha)$ معناه $m=f(\alpha)$ أو $m=-f(\alpha)$ المعادلة لها حلين متمايزين. في حالة $f(\alpha)<\lvert m\rvert<4$ معناه $f(\alpha)<m<4$ أو $-4<m<-f(\alpha)$ المعادلة لها ثلاث حلول متمايزة. في حالة $\lvert m\rvert=4$ معناه $m=4$ أو $m=-4$ المعادلة لها حلين متمايزين. في حالة $\lvert m\rvert>4$ معناه $4<m$ أو $m<-4$ المعادلة لها حل وحيد.	0.75	0.75
6)	ليكن $2\le\lambda$: $A(\lambda)=\int_2^\lambda f(x)-(x-3)dx=\int_2^\lambda \frac{4\ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}dx=\int_2^\lambda 4\times\frac{1}{x-1}\times\ln(x-1)+5\times\frac{1}{x-1}dx$ $A(\lambda)=\left[4\times\frac{1}{2}(\ln(x-1))^2+5\ln(x-1)\right]_2^\lambda=\left(2(\ln(\lambda-1))^2+5\ln(\lambda-1)\right)\quad u.a$ $A(\lambda)=\left(2(\ln(\lambda-1))^2+5\ln(\lambda-1)\right)\quad cm^2$ تعين قيمة λ حيث $A(\lambda)=12\quad cm^2$ حيث $2\le\lambda$ $A(\lambda)=12\quad cm^2$ تكافئ $2(\ln(\lambda-1))^2+5\ln(\lambda-1)=12$ تكافئ $2(\ln(\lambda-1))^2+5\ln(\lambda-1)-12=0$ بوضع $X=\ln(\lambda-1)$ تكافئ $2X^2+5X-12=0$ تكافئ $2(\ln(\lambda-1)+4)\left(\ln(\lambda-1)-\frac{3}{2}\right)=0$ تكافئ $2(X+4)\left(X-\frac{3}{2}\right)=0$ تكافئ $\ln(\lambda-1)=\frac{3}{2}$ أو $\ln(\lambda-1)=-4$ تكافئ $\lambda=e^{\frac{3}{2}}+1$ أو $\lambda=e^{-4}+1$ و $2\le\lambda$ وعليه قيمة λ حيث $A(\lambda)=12\quad cm^2$ هي: $\lambda=e^{\frac{3}{2}}+1$.	0.5 0.25	0.75

الموضوع الثاني

التمرين الأول 05 نقاط

(1	ليكن $n\in\mathbb{N}$: $W_{n+1}=U_{n+1}-V_{n+1}=\frac{U_n+2V_n}{3}-\frac{U_n+4V_n}{5}=\frac{5U_n+10V_n-3U_n-12V_n}{15}$ $W_{n+1}=\frac{2U_n-2V_n}{15}=\frac{2}{15}(U_n-V_n)=\frac{2}{15}W_n$ إذن (W_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{15}$ بما أن $-1<q<1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}W_n=0$ لدينا $W_0=U_0-V_0=1-2=-1$ إذن من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $W_n=W_0q^n=-1\left(\frac{2}{15}\right)^n=-\left(\frac{2}{15}\right)^n$	0.5 0.25 0.25	1
(2	ليكن $n\in\mathbb{N}$: $U_{n+1}-U_n=\frac{U_n+2V_n}{3}-U_n=\frac{U_n+2V_n-3U_n}{3}=\frac{-2U_n+2V_n}{3}=-\frac{2}{3}(U_n-V_n)=-\frac{2}{3}W_n$ $V_{n+1}-V_n=\frac{U_n+4V_n}{5}-V_n=\frac{U_n+4V_n-5V_n}{5}=\frac{U_n-V_n}{5}=\frac{1}{5}(U_n-V_n)=\frac{1}{5}W_n$ بما أن من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $W_n<0$ إذن $-\frac{2}{3}W_n>0$ و $\frac{1}{5}W_n<0$ إذن $U_{n+1}-U_n>0$ و $V_{n+1}-V_n<0$ معناه المتتالية (U_n) متزايدة تماما والمتتالية (V_n) متناقصة تماما .	0.25 0.25 0.5	1
(3	لدينا المتتالية (U_n) متزايدة تماما والمتتالية (V_n) متناقصة تماما و $\lim_{n\to+\infty}U_n-V_n=\lim_{n\to+\infty}W_n=0$ إذن (U_n) و (V_n) متتاليتين متجاورتين إذن (U_n) و (V_n) متقاربتين نحو نفس النهاية ولتكن l معناه $\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}V_n=l$.	0.5 0.5	1
(4	ليكن $n\in\mathbb{N}$: $T_{n+1}=3U_{n+1}+10V_{n+1}=3\left(\frac{U_n+2V_n}{3}\right)+10\left(\frac{U_n+4V_n}{5}\right)=U_n+2V_n+2U_n+8V_n=3U_n+10V_n=T_n$ معناه المتتالية (T_n) ثابتة معناه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $T_n=T_0=3U_0+10V_0=3+10\times2=23$ بما أن $\lim_{n\to+\infty}T_n=23$ و $\lim_{n\to+\infty}T_n=\lim_{n\to+\infty}(3U_n+10V_n)$ و $\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}V_n=l$ إذن $3l+10l=23$ نحل المعادلة $3l+10l=23$ معناه $13l=23$ معناه $l=\frac{23}{13}$ إذن $\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}V_n=\frac{23}{13}$	0.5 0.25 0.25	1
(5	ليكن $n\in\mathbb{N}$: لدينا $\begin{cases}U_n-V_n=W_n\\3U_n+10V_n=23\end{cases}$ معناه $\begin{cases}10U_n-10V_n=10W_n\\3U_n+10V_n=23\end{cases}$ إذن $13U_n=23+10W_n$ إذن $U_n=\frac{23}{13}+\frac{10}{13}W_n$. إذن $S_n=U_0+U_1+\cdots+U_n=\frac{23}{13}+\frac{10}{13}W_0+\frac{23}{13}+\frac{10}{13}W_1+\cdots+\frac{23}{13}+\frac{10}{13}W_n$ $S_n=\frac{23}{13}(n+1)+\frac{10}{13}(W_0+W_1+\cdots+W_n)=\frac{23}{13}(n+1)+\frac{10}{13}\left(W_0\frac{1-\left(\frac{2}{15}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{15}}\right)$ $S_n=\frac{23}{13}(n+1)-\frac{10}{13}\left(\frac{15}{13}\right)\left(1-\left(\frac{2}{15}\right)^{n+1}\right)=\frac{23}{13}(n+1)-\frac{150}{169}\left(1-\left(\frac{2}{15}\right)^{n+1}\right)$	0.5 0.25 0.25	1

التمرين الثاني 03.25 نقاط

1) تشكيل لجنة من ثلاث أعضاء لهم نفس المهام إذن عدد الحالات الممكنة هو : $C_{12}^{3} = 220$ — 1.75

A : "تكوين لجنة تضم ثلاث رجال"

$$P(A) = \frac{C_8^3}{C_{12}^3} = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}$$ 0.5

B : "تكوين لجنة تضم رجلا وإمرأتين"

$$P(B) = \frac{C_8^1 \times C_4^2}{C_{12}^3} = \frac{8\times 6}{220} = \frac{48}{220} = \frac{12}{55}$$ 0.5

C : "تكوين لجنة تضم عمر"

$$P(C) = \frac{C_1^1 \times C_{11}^2}{C_{12}^3} = \frac{1\times 55}{220} = \frac{55}{220} = \frac{1}{4}$$ 0.5

D : "تكوين لجنة تضم إما عمر وإما مريم"

$$P(C) = \frac{C_1^1 \times C_{10}^2 + C_1^1 \times C_{10}^2}{C_{12}^3} = \frac{1\times 45 + 1\times 45}{220} = \frac{90}{220} = \frac{9}{22}$$ 0.25

2) مجموعة قيم X المتغير الممكنة هي : $X \in \{0;1;2;3\}$ — 1.5 — 0.25

$$P(X=0) = \frac{C_4^3}{C_{12}^3} = \frac{4}{220} = \frac{1}{55}$$ 0.25

$$P(X=1) = \frac{C_4^2 \times C_8^1}{C_{12}^3} = \frac{6\times 8}{220} = \frac{48}{220} = \frac{12}{55}$$ 0.25

$$P(X=2) = \frac{C_4^1 \times C_8^2}{C_{12}^3} = \frac{4\times 28}{220} = \frac{112}{220} = \frac{28}{55}$$ 0.25

$$P(X=3) = \frac{C_8^3}{C_{12}^3} = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}$$ 0.25

قانون احتمال المتغير العشوائي : 0.25

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{220}$	$\frac{48}{220}$	$\frac{112}{220}$	$\frac{56}{220}$

التمرين الثالث 03.75 نقاط

1) الاقتراح الصحيح هو (ب) التبرير : — 0.75 — 0.25

الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين على $]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\left(2\times\frac{1}{x}\times\ln x\right)(x) - (1)(\ln x)^2}{x^2} = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$$

إذن

$$f''(x) = \frac{\left(2\times\frac{1}{x} - 2\times\frac{1}{x}\times\ln x\right)(x^2) - (2x)\left(2\ln x - (\ln x)^2\right)}{(x^2)^2} = \frac{2x - 2x\ln x - 4x\ln x + 2x(\ln x)^2}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{x\left(2 - 6\ln x + 2(\ln x)^2\right)}{x^4} = \frac{2\left(\ln x - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(\ln x - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)}{x^3}$$

دراسة إشارة $f''(x)$:

لدينا : $\ln x - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \geq 0$ تكافئ $x \geq e^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}$. ولدينا $\ln x - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \geq 0$ تكافئ $x \geq e^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}$.

إذن جدول إشارة $f''(x)$:

x	0		$e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$		$e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$		$+\infty$
$\ln(x)-e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)-e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
x^3	‖	$+$		$+$		$+$	
$f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

المشتقة الثانية f'' تنعدم مرتين عند $e^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}$ وعند $e^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}$ وتغير من إشارتها إذن (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف . 0.5

---

2) الاقتراح الصحيح هو (أ) التبرير : 0.25 — 0.75

ليكن $n\in\mathbb{N}$:

$$I_n=\int_n^{n+1} f(x)\,dx=\int_n^{n+1} e^{x-1}dx=\left[e^{x-1}\right]_n^{n+1}=e^{n+1-1}-e^{n-1}=e^n-e^ne^{-1}=\left(1-e^{-1}\right)e^n$$

إذن $I_{n+1}=\left(1-e^{-1}\right)e^{n+1}=\left(1-e^{-1}\right)e^ne=e\times I_n$ معناه المتتالية (I_n) متتالية هندسية أساسها $q=e$. 0.5

---

3) الاقتراح الصحيح هو (ب) التبرير : 0.25 — 0.75

ليكن $n\in\mathbb{N}$:

$$V_{n+1}-V_n=\frac{1}{U_{n+1}-3}-\frac{1}{U_n-3}=\frac{1}{\frac{9}{6-U_n}-3}-\frac{1}{U_n-3}=\frac{6-U_n}{9-3(6-U_n)}-\frac{1}{U_n-3}$$

$$V_{n+1}-V_n=\frac{6-U_n}{9-18+3U_n}-\frac{1}{U_n-3}=\frac{6-U_n}{3U_n-9}-\frac{3}{3U_n-9}=\frac{6-U_n-3}{3U_n-9}=\frac{-(U_n-3)}{3(U_n-3)}=-\frac{1}{3}$$

إذن المتتالية (V_n) متتالية حسابية اساسها $r=-\frac{1}{3}$. 0.5

---

4) الاقتراح الصحيح هو (ب) التبرير : 0.25 — 0.75

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$:

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}_+^*$: $f(x)=2^{-\frac{3}{x}}=e^{-\frac{3}{x}\ln 2}$ إذن $f'(x)=-(3\ln 2)\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{3}{x}\ln 2}=\left(\frac{3\ln 2}{x^2}\right)e^{-\frac{3}{x}\ln 2}$

بما أن من أجل كل $x\in\mathbb{R}_+^*$: $f'(x)>0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+^*$. 0.5

---

5) الاقتراح الصحيح هو (ج) التبرير : 0.25 — 0.75

باستعمال خاصية المكاملة بالتجزئة :

$$K=\int_2^4 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx=\left[x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]_2^4-\int_2^4 x\left(\frac{\frac{(1)(x-1)-(1)(x+1)}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}}\right)dx$$

$$K=4\ln\left(\frac{4+1}{4-1}\right)-2\ln\left(\frac{2+1}{2-1}\right)-\int_2^4 x\left(\frac{-2}{(x-1)^2}\right)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)dx=4\ln\left(\frac{5}{3}\right)-2\ln 3+\int_2^4\left(\frac{-2x}{(x-1)(x+1)}\right)dx$$

$$K=4\ln 5-4\ln 3-2\ln 3+\int_2^4\left(\frac{-2x}{x^2-1}\right)dx=4\ln 5-6\ln 3+\left[\ln\left(x^2-1\right)\right]_2^4$$

$$K=4\ln 5-6\ln 3+\ln\left(4^2-1\right)-\ln\left(2^2-1\right)=4\ln 5-6\ln 3+\ln 15-\ln 3$$

$$K=4\ln 5-7\ln 3+\ln 5+\ln 3=5\ln 5-6\ln 3$$

0.5

التمرين الرابع 08 نقاط

I) لدينا الدالة :

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto g(x)=1-e^{2x}-2xe^{2x}$$

1) دراسة تغيرات الدالة g : 1.5

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 1-e^{2x}-2xe^{2x}=-\infty$ 0.25

التبرير : $\lim_{X\to+\infty} e^{X}=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 1-e^{2x}-2xe^{2x}=1$ 0.25

التبرير: $\lim_{X\to-\infty} e^{X}=0$ و $\lim_{X\to-\infty} Xe^{X}=0$.

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$g'(x)=-2e^{2x}-(2)e^{2x}-2x\left(2e^{2x}\right)=e^{2x}(-2-2-4x)=e^{2x}(-4-4x)$ 0.25

جدول إشارة $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-4-4x$		$+$	0	$-$	
e^{2x}		$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

0.25

إذن الدالة g متزايدة تماما على $]-\infty;-1]$ ومتناقصة تماما على $[-1;+\infty[$. 0.25

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(x)$	1	↗	$1+e^{-2}$	↘	$-\infty$

0.25

$g(-1)=1-e^{-2}-2(-1)e^{-2}=1-e^{-2}+2e^{-2}=1+e^{-2}\approx 1.1353$

2) 0.5

$g(0)=1-e^{2(0)}-2(0)e^{2(0)}=1-1=0$ 0.25

جدول إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

0.25

II)

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto f(x)=x+3-xe^{2x}$$

1) 0.5

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+3-xe^{2x}=\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{3}{x}-e^{2x}\right)=-\infty$ 0.25

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x+3-xe^{2x}=\lim_{x\to-\infty} x+3-\frac{1}{2}(2x)e^{2x}=-\infty$ 0.25

التبرير : $\lim_{X\to-\infty} Xe^{X}=0$

2) 1

$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+3)=\lim_{x\to-\infty} -xe^{2x}=\lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}(2x)e^{2x}=0$ 0.25

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x+3)=\lim_{x\to+\infty} -xe^{2x}=-\infty$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+3$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$. 0.25

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ):

ليكن $x\in\mathbb{R}$: $f(x)-(x+3)=-xe^{2x}$

جدول وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ):

x	$-\infty$		0		$-\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
e^{2x}		$+$		$+$	
$f(x)-(x+3)$		$+$	0	$-$	
الوضعية بين (C_f) و (Δ).		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	

0.5

$$(C_f)\cap(\Delta)=\{(0;3)\}$$

3) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $f'(x)=1-e^{2x}-x\left(2e^{2x}\right)=1-e^{2x}-2xe^{2x}=g(x)$ 0.25 — 1

جدول إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)=g(x)$		$+$	0	$-$	

0.25

إذن الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ ومتناقصة تماما على $[0;+\infty[$. 0.25

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$			3		
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

0.25

4) (C_f) يقبل مماس (T) يوازي (Δ) معناه $f'(x)=1$ معناه $1-e^{2x}-2xe^{2x}=1$ معناه $-e^{2x}(1+2x)=0$ — 0.5

معناه $1+2x=0$ معناه $x=-\frac{1}{2}$ معناه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي (Δ) معادلته من الشكل : 0.25

$$(T): y=f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+3-\left(-\frac{1}{2}\right)e^{2\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{5}{2}+\frac{e^{-1}}{2}$$

$$(T): y=x+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}+\frac{e^{-1}}{2}$$ 0.25

$$(T): y=x+3+\frac{e^{-1}}{2}$$

5) الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال $]-3.5;-3[$ — 0.5

وبما أن $f(-3.5)\approx-0.49$ و $f(-3)\approx0.007$ إذن $f(-3.5)\times f(-3)<0$

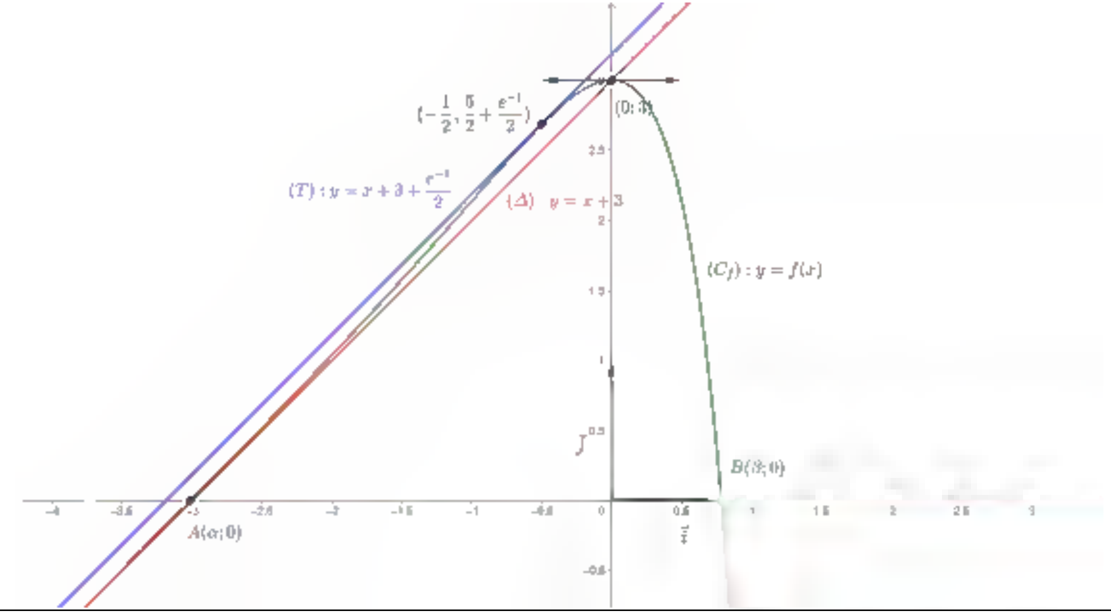
إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $\alpha\in]-3.5;-3[$.

الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال $]0.5;1[$

وبما أن $f(0.5)\approx2.14$ و $f(1)\approx-3.38$ إذن $f(0.5)\times f(1)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث : $\beta\in]0.5;1[$. 0.25

إذن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل (xx') في نقطتين هما $A(\alpha;0)$ و $B(\beta;0)$. 0.25

(6	رسم (Δ)؛ (T) و (C_f):  	0.25 0.25	0.5
(7	حلول المعادلة $f(x)=x+m$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=x+m$. ملاحظة (مناقشة مائلة) في حالة $m\le 3$ المعادلة تقبل حل وحيد. في حالة $3<m<3+\frac{e^{-1}}{2}$ المعادلة تقبل حلين متمايزين. في حالة $m=3+\frac{e^{-1}}{2}$ المعادلة تقبل حل وحيد. في حالة $3+\frac{e^{-1}}{2}<m$ المعادلة لا تقبل حل في $\mathbb{R}$.	0.5	0.5
(8	ليكن $\lambda\le 0$: $A(\lambda)=\int_{\lambda}^{0} f(x)-(x+3)\,dx=\int_{\lambda}^{0}-xe^{2x}dx=\left[-\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_{\lambda}^{0}-\int_{\lambda}^{0}-\frac{1}{2}e^{2x}dx$ $A(\lambda)=-\frac{1}{2}(0)e^{2(0)}-\left(-\frac{1}{2}\lambda e^{2\lambda}\right)+\int_{\lambda}^{0}\frac{1}{2}e^{2x}dx=\frac{1}{2}\lambda e^{2\lambda}+\left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_{\lambda}^{0}$ $A(\lambda)=\frac{1}{2}\lambda e^{2\lambda}+\frac{1}{4}e^{2(0)}-\frac{1}{4}e^{2\lambda}=\left(\frac{1}{2}\lambda e^{2\lambda}-\frac{1}{4}e^{2\lambda}+\frac{1}{4}\right)\quad u.a$ $A(\lambda)=\left(\frac{1}{2}\lambda e^{2\lambda}-\frac{1}{4}e^{2\lambda}+\frac{1}{4}\right)\quad cm^2$ $\lim_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)=\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{1}{2}\lambda e^{2\lambda}-\frac{1}{4}e^{2\lambda}+\frac{1}{4}=\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{1}{4}(2\lambda)e^{2\lambda}-\frac{1}{4}e^{2\lambda}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ التبرير : $\lim_{X\to-\infty}Xe^{X}=0$	0.25 0.25	0.5
(III	$h:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ $x\mapsto h(x)=\frac{1+3x-e^{\frac{2}{x}}}{x}$		

<table>
<tr>
<td>1)</td>
<td>ليكن $x\in\mathbb{R}^*$:
$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)+3-\left(\frac{1}{x}\right)e^{2\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{1+3x}{x}-\frac{e^{\frac{2}{x}}}{x}=\frac{1+3x-e^{\frac{2}{x}}}{x}=h(x)$$</td>
<td>0.25</td>
<td>0.25</td>
</tr>
<tr>
<td>2)</td>
<td>الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$:
$$h'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)f'\left(\frac{1}{x}\right)$$
لدينا
<table>
<tr><td>x</td><td>$+\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{x}$</td><td>$0 \searrow -\infty$</td><td>||</td><td>$+\infty \searrow 0$</td></tr>
</table>

و نعلم أن
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr>
</table>

إذن جدول إشارة $h'(x)$:
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td>||</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>$-\frac{1}{x^2}$</td><td>$-$</td><td>||</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>$h'(x)$</td><td>$-$</td><td>||</td><td>$+$</td></tr>
</table>

إذن الدالة h متناقصة تماما على $]-\infty;0[$ ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$.</td>
<td>0.25
0.25
0.25</td>
<td>0.75</td>
</tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>