الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية جيجل — الموسم الدراسي: 2023م-2024م

ثانوية راشدي محمد -سيدي معروف — المستوى: الثالثة -رياضيات

اختبار الفصل الثاني في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين ويجيب عليه:

الموضوع الأوّل:

التمرين الأول: (06 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة والقابلة للإشتقاق على المجال: $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{1+ax^2}$ حيث $a\in\mathbb{R}_+-\{1\}$.

I/ تحقق أن الدالة f متزايدة تماما.

II/ نعتبر (u_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول: $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{1+a\left(u_n\right)^2}$.

1/ نفرض أن: $0<a<1$.

ا/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leq u_n\leq\dfrac{1}{\sqrt{1-a}}$.

ب/ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة .

ج/ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم عين نهايتها.

2/ نفرض أن: $a>1$.

نعتبر (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\left(u_{n+1}-u_n\right)\left(u_{n+1}+u_n\right)$.

ا/ بين أن المتتالية (v_n) هندسية، يُطلب تعيين أساسها وحدها الاول.

ب/ إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\left(u_{n+1}\right)^2-\left(u_n\right)^2=a^n$.

ج/ نعرف على $\mathbb{N}$ المتتالية (w_n) كالتالي: $\begin{cases} w_0=0 \\ w_n=1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-1} \quad ; n\geq 1\end{cases}$.

- أكتب w_n بدلالة n .

د/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\sqrt{w_n}$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الثاني: (07 نقاط)

1/ ا/ أدرس أولية العدد 631 .

ب/ تحقق أنه من أجل كل عددين حقيقيين x و y: $x^3-y^3=(x-y)\left(x^2+y^2+xy\right)$.

ج/ جد جميع الثنائيات المرتبة $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق: $x^3-y^3=631$.

2/ لتكن المعادلة ذات المجهول $(a;b)$ من $\mathbb{Z}^2$ التالية: $1962b-1830a=18 \cdots (E)$.

ا/ بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب/ تحقق أن الثنائية $(15;14)$ حل للمعادلة (E) ، ثم استنتج حلول المعادلة (E) .

ج/ عين الثنائيات الطبيعية (a,b) من حلول المعادلة (E) التي تحقق: $PGCD(a,b)=3$.

3/ ا/ أُدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13 .

ب/ بين أنه إذا كانت الثنائية $(\alpha;\beta)$ حلا للمعادلة (E) فإن: $6\times 9^{327\beta}+3^{610\alpha+2024}-1445\equiv 0\,[13]$.

التمرين الثالث: (07 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln\left(e^x+1\right)}{e^{x-2}}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ ا/ عين نهاية الدالة f عند $-\infty$.

ب/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=e^2\left[\dfrac{x}{e^x}+e^{-x}\ln\left(e^{-x}+1\right)\right]$

ج/ عين نهاية الدالة f عند $+\infty$.

د/ استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين، يُطلب تعيين معادلة لكل منهما.

2/ نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)$.

ا/ بين أن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

3/ ا/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^{-x+2}g\left(e^x\right)$.

ب/ إستنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4/ أحسب $f(0)$ ، ثم أنشئ المستقيمات المقاربة والمنحنى (C_f).

5/ لتكن F الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

ا/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\dfrac{1}{e^x+1}=1-\dfrac{e^x}{e^x+1}$ ، ثم أحسب: $\int_0^x \dfrac{1}{e^t+1}dt$.

ب/ باستعمال المكاملة بالتجزئة، بين أن: $F(x)=e^2\left[x-\ln\left(1+e^x\right)\right]-f(x)+2e^2\ln 2$.

ج/ أحسب $F(\ln 2)$ وفسره هندسيا، ثم عين $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

انتهى الموضوع الأوّل.

الموضوع الثّاني:

التمرين الأول: (06 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ : $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{a + 2au_n}{a + 1 + u_n}$ حيث a عدد حقيقي.

1/ عين قيم a التي تجعل المتتالية (u_n) ثابتة.

2/ نفرض أن: $a > 3$.

ا/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < a$.

ب/ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ج/ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم عين نهايتها.

3/ نفرض أن $a = 2$ ، ونعتبر (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$.

ا/ بين أن المتتالية (v_n) هندسية، يُطلب تعيين أساسها وحدها الاول.

ب/ أكتب v_n بدلالة n، ثم استنتج u_n بدلالة n وأحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

ج/ أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = \dfrac{1}{1 + u_0} + \dfrac{1}{1 + u_1} + \cdots + \dfrac{1}{1 + u_n}$.

4/ نفرض أن $a = -1$ ، ونعتبر (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$.

ا/ بين أن المتتالية (w_n) حسابية، يُطلب تعيين أساسها وحدها الاول.

ب/ أكتب w_n بدلالة n، ثم استنتج u_n بدلالة n وأحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثاني: (07 نقاط)

نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ من $\mathbb{Z}^2$ التالية: $(E_m) \cdots\ 45x + 20y = 2^m - 18$.

I/ 1/ أُدرس حسب قيم العدد الطبيعي m بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^m على 5 .

2/ عين قيم العدد الطبيعي m التي تجعل المعادلة (E_m) تقبل حلولا.

II/ نضع $m = 7$ ، ونعتبر المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ من $\mathbb{Z}^2$ التالية: $(E) \cdots\ 9x + 4y = 22$

1/ ا/ تحقق أن المعادلة (E_7) تقبل حلولا، ثم استنتج أن المعادلة (E_7) تكافئ المعادلة: (E) .

ب/ بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن: $x \equiv 2[4]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E) .

2/ ليكن N عددا طبيعيا يُكتب $\overline{133\alpha\beta3}$ في النظام ذو الأساس 4 ، ويُكتب $\overline{56\alpha0}$ في النظام ذو الأساس 7 ، حيث α و β عددان طبيعيان.

- عين α و β ، ثم أكتب N في النظام العشري.

/3 نعتبر: $a = 88n + 22$ و $b = 198n + 44$ ، حيث n عدد طبيعي، وليكن $d = PGCD(a, b)$.

ا/ تحقق أن الثنائية $(a; -b)$ حل للمعادلة (E) ، ثم استنتج القيم الممكنة لـ d .

ب/ تحقق أن 22 يقسم كلا من a و b .

ج/ باستعمال مبرهنة بيزو، بين أن العددين $(4n + 1)$ و $(9n + 2)$ أوليان فيما بينهما، ثم استنتج قيمة d .

التمرين الثالث: (07 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1 - e^x}{x^2}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. (نأخذ: $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$)

/1 أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتائج هندسيا.

/2 نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 2\left(1 - e^{-x}\right) - x$.

ا/ أُدرس إتجاه تغير الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

ب/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\ln 4 < \alpha < \ln 6$.

ج/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

/3 ا/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما: $f'(x) = \frac{e^x}{x^3} g(x)$.

ب/ إستنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

/4 أنشئ المنحنى (C_f). (نأخذ: $f(\alpha) \simeq -1.5$)

/5 لتكن F الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $F(x) = \begin{cases} \int_x^{2x} \frac{1 - e^t}{t^2} dt & ; x > 0 \\ -\ln 2 & ; x = 0 \end{cases}$.

ا/ باستعمال المكاملة بالتجزئة، بين أنه من أجل كل $x > 0$: $F(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2x} - \frac{e^x - 1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$.

ب/ بين أنه من أجل كل $x > 0$ فإن: $e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln 2$.

ج/ أَحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \right)$ ، ثم استنتج أن الدالة F مستمرة على يمين 0 .

انتهى الموضوع الثاني.

☺☺بالتوفيق للجميع☺☺

ثانوية راشدي محمد - سيدي معروف.

الموسم الدراسي: 2023/2024

المستوى: 03 رياضيات

مناقشة الإختبار الثاني في مادة الرياضيات.

الموضوع الأول:

$f(x)=\sqrt{1+ax^2}$; $D_f=[0,+\infty[$; $a\in\mathbb{R}_+-\{1\}$

(I) التحقق أن f متزايدة تماما:

لدينا الدالة f تقبل الإشتقاق على $[0,+\infty[$ و:

$$f'(x)=\frac{2ax}{\sqrt{1+ax^2}}>0$$

إذن: الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

(II)

$$(u_n):\begin{cases}u_0=0\\ u_{n+1}=\sqrt{1+a(u_n)^2}\end{cases}$$

1) نفرض: $0<a<1$ ؛

أ/ البرهان بالتراجع:

نسمي $P(n)$ الخاصية: « $0\le u_n\le\frac{1}{\sqrt{1-a}}$ »

ولنثبت صحتها من أجل كل عدد طبيعي n.

• من أجل $n=0$: لدينا: $u_0=0$

أي: $0\le u_0\le\frac{1}{\sqrt{1-a}}$ إذن $P(0)$ محققة.

• ليكن n عددا طبيعيا كيفيا.

نفرض صحة $P(n)$ أي $0\le u_n\le\frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

وبما أن f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

فإن: $f(0)\le f(u_n)\le f\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}}\right)$

لدينا: $f(0)=\sqrt{1+a(0)}=1$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}}\right)=\sqrt{1+a\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{a}{1-a}}=\sqrt{\frac{1-a+a}{1-a}}=\sqrt{\frac{1}{1-a}}=\frac{1}{\sqrt{1-a}}.$$

ومنه: $0<1\le u_{n+1}\le\frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

إذن $P(n+1)$ صحيحة بفرض صحة $P(n)$.

إذن حسب مبدأ البرهان بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n: $0\le u_n\le\frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

ب/ إثبات أن (u_n) متزايدة:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{1+a(u_n)^2}-u_n=\frac{1+a(u_n)^2-(u_n)^2}{\sqrt{1+a(u_n)^2}+u_n}=\frac{1+(a-1)(u_n)^2}{\sqrt{1+a(u_n)^2}+u_n}.$$

لدينا: $\sqrt{1+a(u_n)^2}+u_n>0$ و لدينا: $0<a<1$

ومنه: $a-1<0$ ، ولدينا: $0\le u_n\le\frac{1}{\sqrt{1-a}}$

ومنه: $0\le(u_n)^2\le\frac{1}{1-a}$ ومنه:

$$0\ge(a-1)(u_n)^2\ge\frac{a-1}{1-a}$$

أي: $0\le 1+(a-1)(u_n)^2\le 1$

إذن: $u_{n+1}-u_n\ge0$ إذن (u_n) متزايدة.

جـ/ الإستنتاج:

لدينا (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى

إذن (u_n) متقاربة.

تعيين نهايتها:

(u_n) متقاربة معناه: $\lim_{n\to+\infty}u_n=l\in\mathbb{R}$

ومنه: $l=\sqrt{1+al^2}$

أي: $l^2=1+al^2$ ومنه $1+(a-1)l^2=0$ ،

ومنه: $l^2=\frac{1}{1-a}$ إذن: $l=\pm\sqrt{\frac{1}{1-a}}$

وبما أن $0\le u_n$ إذن: $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

2) نفرض: $a>0$ ؛

$$v_n=(u_{n+1}-u_n)(u_{n+1}+u_n)=(u_{n+1})^2-(u_n)^2.$$

أ/ تبيان أن (v_n) هندسية:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1}=(u_{n+2})^2-(u_{n+1})^2=1+a(u_{n+1})^2-1-a(u_n)^2$$

$$=a\left((u_{n+1})^2-(u_n)^2\right)=a\,v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=a$

وحدها الأول: $v_0=(u_1)^2-(u_0)^2=\sqrt{1}=1$

ب/ الإستنتاج:

بما أن (v_n) متتالية هندسية فإن:

$$v_n=v_0\times q^n=1\times a^n=a^n$$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n: $(u_{n+1})^2-(u_n)^2=a^n$

جـ/ كتابة w_n بدلالة n:

$$w_n=1+a+a^2+\dots+a^{n-1}$$

$$=1\times\left(\frac{a^n-1}{a-1}\right)=\frac{a^n-1}{a-1}=w_n$$

2- أ) تبيان:

لدينا: $w_n = 1+a+a^2+\dots+a^{n-1}$

$= q_0 + q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1}$

$= (u_1)^2-(u_0)^2+(u_2)^2-(u_1)^2+\dots+(u_n)^2-(u_{n-1})^2$

$= -(u_0)^2+(u_n)^2-(u_n)^2$

ومنه: $|u_n| = \sqrt{w_n}$ وبما أن: $u_n \geq 0$

فإن: $u_n = \sqrt{w_n}$

تعيين النهاية: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{a^n-1}{a-1}} = +\infty$

التمرين الثاني:

1) أ) دراسة أولية العدد 631: لدينا $\sqrt{631} \simeq 25{,}12$

القاسم:	2	3	5	7	11	13	17	19	23
قابلية القسمة	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗

العدد 631 لا يقبل القسمة على أي عدد أولي أصغر من $\sqrt{631}$ إذن العدد 631 عدد أولي.

ب) التحقق: من أجل كل عددين x و y:

$(x-y)(x^2+y^2+xy) = x^3+\cancel{xy^2}+\cancel{x^2y}-\cancel{yx^2}-y^3-\cancel{xy^2}$
$= x^3-y^3.$

2- إيجاد الثنائيات الطبيعية (x,y) بحيث:

$x^3-y^3 = 631$ تكافئ $(x-y)(x^2+y^2+xy)=631$

إذن: $x-y \mid 631$ و $x^2+y^2+xy \mid 631$،

وبما أن x و y أعداد طبيعية فإن: $x-y < x^2+y^2+xy$

وعليه: $\begin{cases} x-y = 1 \\ x^2+y^2+xy = 631 \quad \dots(*) \end{cases}$ ومنه $\boxed{x = 1+y}$

بالتعويض في $(*)$ نجد،

$(1+y)^2+y^2+(1+y)y = 1+y^2+2y+y^2+y+y^2$

$\Rightarrow 3y^2+3y+1 = 631$

أي، $3y^2+3y-630=0$ ومنه لدينا،

$\Delta = (3)^2-4(3)(-630) = 7569 \Rightarrow \boxed{\sqrt{\Delta} = 87}$

ومنه، $y = \dfrac{-3-87}{2(3)} = \dfrac{-90}{6} = -15 \notin \mathbb{N}$

أو $y = \dfrac{-3+87}{2(3)} = \dfrac{84}{6} = 14 \in \mathbb{N}$

إذن: $\boxed{y=14}$ ومنه، $x = 1+14 = \boxed{15 = x}$

وإذن: $\boxed{(x,y) = (15,14)}$

2- (E) ... $1962b-1830a = 18$

أ/- تبيان أن (E) تقبل حلولا:

لدينا:

$1962 = 1830 \times 1 + 132$
$1830 = 132 \times 13 + 114$
$132 = 114 \times 1 + 18$
$114 = 18 \times 6 + 6$
$18 = 6 \times 3 + 0$

إذن $PGCD(1962,1830)=6$ وبما أن $6 \mid 18$

فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب) التحقق:

لدينا $1962(14)-1830(15) = 27468-27450$
$= 18$

إذن الثنائية $(15;14)$ حل للمعادلة (E).

حل المعادلة (E): لدينا،

$1962b - 1830a = 18$

$1962(14)-1830(15)=18$ معناه

بالطرح طرفا لطرف نجد!

$1962(b-14)-1830(a-15) = 0$

ومنه، $6 \times (327(b-14)-305(a-15)) = 0$

أي: $327(b-14) = 305(a-15) \quad \dots(1)$

وبما أن: $327 \wedge 305 = 1$، وبما أن:

$327 \mid 305(a-15)$ فإن، $327 \mid a-15$

وإذن: $a-15 = 327k$ أي، $a = 327k+15$

بالتعويض في (1) نجد: $327(b-14) = 305(327k)$

ومنه: $b-14 = 305k$ وإذن: $b = 305k+14$

وإذن: $(a,b) = (327k+15;\ 305+14)$

حيث، $k \in \mathbb{Z}$.

د) تعيين (a,b) بحيث: $a \wedge b = 3$:

معناه: $3 \mid a$ و $3 \mid b$ أي $a \equiv 0\ [3]$ و $b \equiv 0\ [3]$

ومنه $\begin{cases} 327k+15 \equiv 0\ [3] \\ 305+14 \equiv 0\ [3] \end{cases}$ بالطرح طرفا لطرف نجد، $22k+1 \equiv 0\ [3]$

ومنه $22k \equiv -1\ [3]$ وبما أن: $22 \equiv 1\ [3]$

وإذن: $22k \equiv k\ [3]$ إذن، $k \equiv 2\ [3]$

وإذن، $k = 3q+2$ وعليه: $q \in \mathbb{N}$

$a = 327(3q+2)+15 = 981q+669$

$b = 305(3q+2)+14 = 915q+624$

وإذن، $(a,b) = (981q+669;\ 915q+624);\ q \in \mathbb{N}$

3- أ/ دراسة بواقي قسمة 9^n على 13:

لدينا، $\begin{cases} 9^0 \equiv 1\ [13] \\ 9^1 \equiv 9\ [13] \\ 9^2 \equiv 3\ [13] \\ 9^3 \equiv 1\ [13] \end{cases}$ وإذن،

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$r_n=$	1	9	3

ج) 1. تبيان أن $6\times 9^{327\beta}+3^{610\alpha+2024}-1445\equiv 0[13]$

حيث (α,β) حل للمعادلة (E).

معناه $327\beta-305\alpha=3$.

لدينا $6\times 9^{327\beta}+3^{610\alpha+2024}=6\times 9^{327\beta}+9^{305\alpha+1012}$

$=9^{327\beta}\left(6+9^{305\alpha+1012-327\beta}\right)$

$=9^{327\beta}\left(6+9^{-3+1012}\right)$

$=9^{327\beta}\left(6+9^{1009}\right)$

لدينا $327\beta=3(109\beta)$ ومنه $\boxed{9^{327\beta}\equiv 1[13]}$ ...(1)

$1009=3(336)+1$ ومنه $9^{1009}\equiv 9[13]$

ومنه $\boxed{6+9^{1009}\equiv 2[13]}$ ...(2) $(6+9=15)$

إذن بضرب (1) و(2) طرفا لطرف نجد

(3) $9^{327\beta}\left(6+9^{1009}\right)\equiv 2[13]$

إذن: $\boxed{6\times 9^{327\beta}+3^{610\alpha+2024}\equiv 2[13]}$ ...(3)

ولدينا $1445=13\times(111)+2$

إذن: $1445\equiv 2[13]$ ...(4)

من (3) و(4) نجد $6\times 9^{327\beta}+3^{610\alpha+2024}-1445\equiv 2-2[13]$

إذن $6\times 9^{327\beta}+3^{610\alpha+2024}-1445\equiv 0[13]$

4) لدينا $\cancel{N=\overline{j222jj2}=\overline{2j2i0}^{5}}$

ومنه $\cancel{N=2+3j+3^2j+3^3\times2+3^4\times2+3^5\times2+3^6j}$

إذن $N=704+741j$

ولدينا $N=0+5i+2\times5^2+5^3j+2\times5^4$

$N=5i+125j+1300$

إذن $704+741j=5i+125j+1300$

ومنه $616j=5i+596$.

لدينا $0\le i\le 4$ و $0\le j\le 2$

ومنه

$j=$	0	1	2	إذن
$i=$	$\frac{-596}{5}$	4	$\frac{636}{5}$	قيم i:
	✗	تقبل	✗	القبول

نستنتج $(i;j)=(4;1)$ إذن

ومنه $N=704+741(1)=\boxed{1445=N}$

التمرين الثالث:

$f(x)=\frac{\ln(e^x+1)}{e^{x-2}}$; $D_f=\mathbb{R}$

1-أ) تفسير النهاية:

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln(e^x+1)}{e^{x-2}}\right)=\lim_{t\to0}e^2\left(\frac{\ln(t+1)}{t}\right)$

$=e^2$ (بوضع $t=e^x$)

ب) التحقق: لدينا من أجل كل عدد حقيقي x

$e^2\left(\frac{x}{e^x}+e^{-x}\ln(e^{-x}+1)\right)=\left(\frac{x+\ln(e^{-x}+1)}{e^x}\right)e^2$

$=\frac{x+\ln\left(e^{-x}(1+e^x)\right)}{e^{x-2}}=\frac{x-x+\ln(1+e^x)}{e^{x-2}}$

$=f(x)$.

ج-1) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}e^2\left(\frac{x}{e^x}+e^{-x}\ln(e^{-x}+1)\right)$

$=0$

الاستنتاج: (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور الفواصل معادلتيهما: $y=e^2$ عند $-\infty$ و $y=0$ عند $+\infty$.

2) $D_g=]-1;+\infty[$; $g(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)$

أ- تبيان أن g متناقصة تماما على $[0;+\infty[$:

لدينا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$:

$g'(x)=\frac{1(x+1)-1(x)}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}=\frac{1-x-1}{(x+1)^2}$

$=\frac{-x}{(x+1)^2}$

وعليه

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	

إذن الدالة g متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

ج- لدينا $g(0)=0$ و g متناقصة تماما على $]0,+\infty[$ إذن من أجل كل x من المجال $]0,+\infty[$ لدينا $g(x)<g(0)$ أي $g(x)<0$.

3) أ- التحقق من المشتق: لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$f'(x)=-e^{-x+2}\ln(e^x+1)+\frac{e^x}{e^x+1}e^{-x+2}$

$=e^{-x+2}\left(\frac{e^x}{e^x+1}-\ln(e^x+1)\right)=e^{-x+2}g(e^x)$

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^x>0$ وبالتالي $g(e^x)\leq 0$ و $e^{-x+2}>0$ وبالتالي $f'(x)\leq 0$

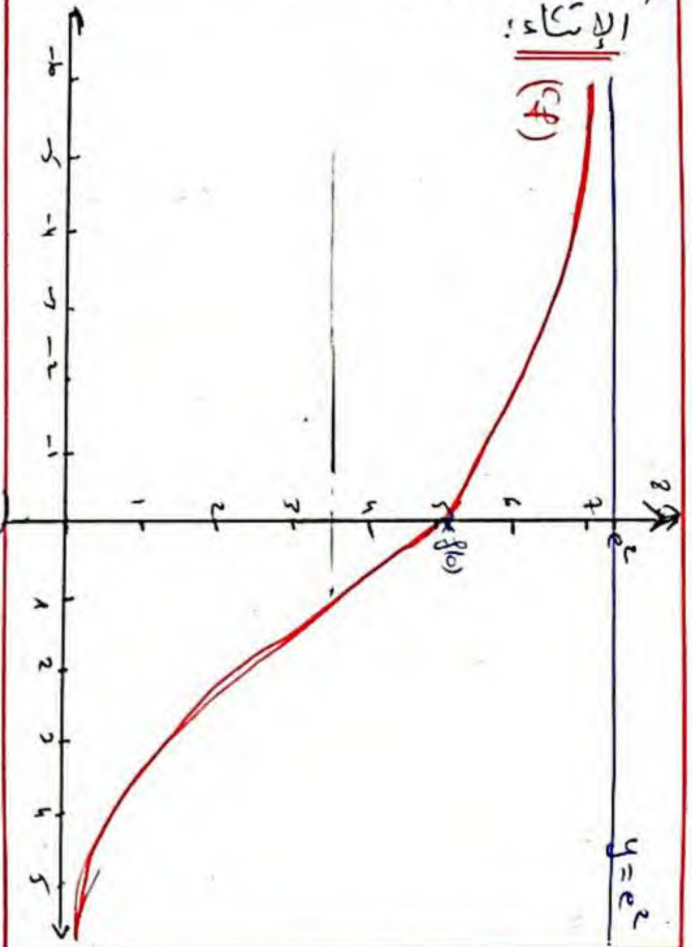
إذن الدالة f متناقصة في $\mathbb{R}$.

جدول تغيراتها

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	e^2 ↘	0

4-) $f(0)=e^2\ln(2)\simeq 5{,}12$

الإنشاء:



5-) $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$; $x\in[0;+\infty[$

1/ التحقق:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي:

$1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}$.

ومنه: $\int_0^x \frac{1}{e^t+1}dt=\int_0^x\left(1-\frac{e^t}{e^t+1}\right)dt$

$=[t-\ln(e^t+1)]_0^x=\boxed{x-\ln(e^x+1)+\ln 2}$

ب/ الاستنتاج: لدينا:

$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x e^{-t+2}\ln(e^t+1)\,dt$

نضع: $\begin{cases}u(t)=\ln(e^t+1)\\ v'(t)=e^{-t+2}\end{cases}$ أي: $\begin{cases}u'(t)=\frac{e^t}{e^t+1}\\ v(t)=-e^{-t+2}\end{cases}$

ومنه: $F(x)=\left[-e^{-t+2}\ln(e^t+1)\right]_0^x-\int_0^x -\frac{e^t}{e^t+1}e^{-t+2}\,dt$

$=-e^{-x+2}\ln(e^x+1)+e^2\ln 2+\int_0^x\frac{e^2}{e^t+1}\,dt$

$=-f(x)+e^2\ln 2+e^2(x-\ln(e^x+1)+\ln 2)$

$F(x)=e^2(x-\ln(e^x+1))+2e^2\ln 2-f(x)$

* ~~الدالة F هي الدالة الأصلية للدالة f على $[0;+\infty[$ والتي تنعدم عند $x=0$.~~

ج/ حساب: $F(\ln 2)=e^2(\ln 2-\ln 3)+2e^2\ln 2-\frac{e^2}{2}\ln 3$

$=e^2(\ln 2+2\ln 2-\ln 3-\frac{1}{2}\ln 3)$

$F(\ln 2)=e^2(3\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3)$

التفسير الهندسي: $F(\ln 2)$ هو مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات: $y=0$ ، $x=0$ ، $x=\ln 2$.

النهاية:

$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^2(x-\ln(1+e^x))-f(x)+2e^2\ln 2\right)$

$=\lim_{x\to+\infty}\left(e^2\left(\ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)\right)-f(x)+2e^2\ln 2\right)$

$=\lim_{x\to+\infty}\left(e^2\left(\ln\left(\frac{1}{e^{-x}+1}\right)\right)-f(x)+2e^2\ln 2\right)$

$=2e^2\ln 2$

04.25

تابع التمرين الأول

تابع للموضوع 02

إذن: $e^x\ln 2\leq\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt\leq e^{2x}\ln 2$.

ب/ ومنه لدينا:

$\lim_{x\to 0^{>}} e^x\ln 2=$

$\lim_{x\to 0^{>}} e^{2x}\ln 2=\ln 2$

إذن: $\lim_{x\to 0^{>}}\left(\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt\right)=\ln 2$.

• لدينا: $\lim_{x\to 0^{>}}F(x)=\lim_{x\to 0^{>}}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}-\frac{e^x-1}{x}-\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt\right)$

$=1-1-\ln 2$

$=-\ln 2=F(0)$

إذن F مستمرة على يمين العدد 0.

تابع للموضوع 02

01.77

الموضوع الثاني :

التمرين الأول :

$$(u_n): \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{a+2au_n}{a+1+u_n} \end{cases} ; \quad a \in \mathbb{R}.$$

1- تعيين قيمة a بحيث تكون (u_n) ثابتة :

(u_n) ثابتة معناه من أجل كل عدد طبيعي n :

ومنه: $u_{n+1} = u_n = u_0 = 3$

$$3 = \frac{a+2a\times 3}{a+1+3}$$

ومنه: $3(a+4) = 7a$

ومنه: $12 = 4a$ إذن $a = \frac{12}{4} = \boxed{3 = a}$

2- نفرض أن $a>3$:

أ/ البرهان بالتراجع:

نسمي الخاصية $P(n)$: $0<u_n<a$ ولنثبت صحتها من أجل كل عدد طبيعي n.

• من أجل $n=0$: لدينا: $u_0=3$ معناه: $0<u_0\le 3<a$ إذن $P(0)$ محققة.

• ليكن n عددا طبيعيا كيفيا. نفرض صحة $P(n)$ أي: $0<u_n<a$.

ومنه: لدينا $u_{n+1} = \frac{a+2au_n}{a+1+u_n} = \frac{2a-a+2a^2-2a^2+2au_n}{a+1+u_n}$

$$= \frac{2a(1+a+u_n)-a-2a^2}{a+1+u_n} = 2a - \frac{a(1+2a)}{a+1+u_n}$$

لدينا: $0<u_n<a$ ومنه $a+1 < a+1+u_n < 2a+1$

ومنه: $\frac{1}{2a+1} < \frac{1}{a+1+u_n} < \frac{1}{a+1}$ ومنه:

$$\frac{-a(1+2a)}{a+1} < \frac{-a(1+2a)}{a+1+u_n} < \frac{-a(1+2a)}{2a+1}$$

ومنه: $2a - \frac{a(2a+1)}{a+1} < 2a - \frac{a(1+2a)}{a+1+u_n} < 2a-a$

إذن: $\frac{2a^2+2a-2a^2-a}{a+1} < u_{n+1} < a$

أي $0 < \frac{a}{a+1} < u_{n+1} < a$.

إذن $P(n+1)$ محققة بفرض أن $P(n)$ صحيحة.

إذن حسب مبدأ البرهان بالتراجع: من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<a$.

ب/ تبيان أن (u_n) متزايدة تماما:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}-u_n = \frac{a+2au_n}{a+1+u_n} - u_n = \frac{a+2au_n-au_n-u_n-(u_n)^2}{a+1+u_n}$$

$$= \frac{-(u_n)^2+(a-1)u_n+a}{a+1+u_n}$$

لدينا باعتبار كثير الحدود: $-x^2+(a-1)x+a$

فإن: $\Delta = (a-1)^2-4(-1)(a) = a^2-2a+1+4a$

$= a^2+2a+1 = (a+1)^2 > 0$

ومنه: $\sqrt{\Delta} = a+1$.

وعليه منه فإن: $x_1 = \frac{1-a-a-1}{2(-1)} = a$

$x_2 = \frac{1-a+a+1}{2(-1)} = -2$

وعليه: من أجل

x	$-\infty$		-2		a		$+\infty$
$-x^2+(a-1)x+a$		$-$	0	$+$	0	$-$	

إذن: من أجل $u_n<a$: $-(u_n)^2+(a-1)u_n+a>0$

إذن: $u_{n+1}-u_n>0$ إذن (u_n) متزايدة تماما.

جـ/ الاستنتاج:

(u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى معناه متقاربة.

#تعيين نهايتها: نضع: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$

ومنه: $\ell = \frac{a+2a\ell}{a+1+\ell}$

ومنه: $\ell(a+1+\ell) = a+2a\ell$ وعليه

$\ell^2+(a+1)\ell-2a\ell-a=0$

أي: $\ell^2+(1-a)\ell-a=0$ أي

$-\ell^2+(a-1)\ell+a=0$

مما سبق نجد: $\ell=a$ أو $\ell=-2$

وبما أن $0<u_n<a$ فإن: $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$

3- نفرض $a=2$:

(v_n): $v_n = \frac{u_n-2}{u_n+1}$.

أ/ تبيان أن (v_n) هندسية

لدينا: $u_{n+1} = \frac{2+4u_n}{4+u_n}$ ومنه:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+1} = \frac{\frac{2+4u_n}{3+u_n}-2}{\frac{2+4u_n}{3+u_n}+1} = \frac{2+4u_n-6-2u_n}{2+4u_n+3+u_n}$$

$$= \frac{-4+2u_n}{5+5u_n} = \frac{2(u_n-2)}{5(u_n+1)}$$

$$= \frac{2}{5}v_n$$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{5}$ وحدها الأول: $v_0 = \frac{3-2}{3+1} = \frac{1}{4}$

ب) عبارة الحد العام:

$v_n = v_0 \times q^n$

$v_n = \frac{1}{4}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

لدينا، $v_n = \frac{u_n-2}{u_n+1} = 1-\frac{3}{u_n+1}$ ومنه، $-\frac{3}{u_n+1} = v_n-1$

ومنه، $u_n+1 = \frac{-3}{v_n-1}$ أي،

$u_n = \frac{3}{1-v_n}-1$ أي، $u_n = \frac{3}{1-(\frac{1}{4})(\frac{2}{3})^n}-1$

$\lim u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{1-\underbrace{(\frac{1}{4})(\frac{2}{3})^n}_{0}}-1\right) = 3-1=2$

جـ- حساب المجموع:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$-\frac{3}{u_n+1} = v_n-1$ ومنه، $\frac{1}{u_n+1} = -\frac{1}{3}(v_n-1)$

$= -\frac{1}{3}v_n+\frac{1}{3}$.

وعليه:

$S_n = \frac{1}{1+u_0}+\frac{1}{1+u_1}+\dots+\frac{1}{1+u_n}$

$=\left(-\frac{1}{3}v_0+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}v_1+\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(-\frac{1}{3}v_n+\frac{1}{3}\right)$

$=-\frac{1}{3}\left(v_0+v_1+\dots+v_n\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{3}\right)$

$=-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\left(\frac{1-(\frac{2}{3})^{n-0+1}}{1-\frac{2}{3}}\right)+\frac{1}{3}(n-0+1)$

$=-\frac{1}{12}\left(\frac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{\frac{1}{3}}\right)+\frac{1}{3}(n+1)$

$=-\frac{5}{36}\left(1-(\frac{2}{3})^{n+1}\right)+\frac{1}{3}(n+1)=S_n$

4- نضع $a=-1$ أي: $u_{n+1} = \frac{-1-2u_n}{u_n}$

ونضع: $w_n = \frac{u_n+2}{u_n+1} = 1+\frac{1}{u_n+1}$.

أ- تبيان أن: (w_n) حسابية:

$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}+2}{u_{n+1}+1} = \frac{\frac{-1-2u_n}{u_n}+2}{\frac{-1-2u_n}{u_n}+1}$

$= \frac{-1-2u_n+2u_n}{-1-2u_n+u_n} = \frac{-1}{-1-u_n}$

$= \frac{1}{1+u_n} = w_n-1$.

ومنه، (w_n) متتالية حسابية أساسها $\boxed{r=-1}$

حدها الأول: $w_0 = \frac{3+2}{3+1} = \frac{5}{4}$.

ب- عبارة الحد العام:

$w_n = w_0+nr$

$= \frac{5}{4}+(-1)n = \frac{5}{4}-n = w_n$

• لدينا، $w_n-1 = \frac{1}{u_n+1}$ ومنه، $u_n+1 = \frac{1}{w_n-1}$

ومنه $u_n = \frac{1}{w_n-1}-1$

إذن: $u_n = \frac{1}{\frac{5}{4}-n-1}-1 = \frac{1}{\frac{1}{4}-n}-1$

ومنه، $\lim_{n\to+\infty} u_n = -1$

التمرين الثاني:

$(E_m)\dots\ 45x+20y = 2^m-18$; $m\in\mathbb{N}$

(I) 1- دراسة بواقي قسمة 2^m على 5:

لدينا: $2^0\equiv1\,[5]$ ، $2^1\equiv2\,[5]$ ، $2^2\equiv4\,[5]$ ، $2^3\equiv3\,[5]$ ، $2^4\equiv1\,[5]$ ومنه،

$m=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
$r_m=$	1	2	4	3

2- حتى تقبل (E_m) حلولاً يجب:

أن $PGCD(45;20) \mid 2^m-18$

$45=20\times2+5$

$20=5\times4+0 \Rightarrow 45\wedge20=5$

إذن يجب $5\mid 2^m-18$ أي $2^m-18\equiv0\,[5]$

ومنه، $2^m\equiv18\,[5]$ أي، $2^m\equiv3\,[5]$.

ومنه، $m=4k+3$; $k\in\mathbb{N}$

(II): $m=7$ نضع: $(E_7)\dots\ 45x+20y=110$

$(E)\dots\ 9x+4y=22$

1) 1- التحقق أن (E_7) تقبل حلولاً:

لدينا، $m=7=4(1)+3$ إذن (E_7) تقبل حلولاً.

لدينا $45x+20y=110$ تكافئ

$9x+4y=22$ أي $5(9x)+5\times4y=5\times22$

وبالتالي (E_7) تكافئ (E).

علينا نتحقق (x,y) حل المعادلة (E) معناه

$9x+4y=22$ ومنه $9x=4(-y)+22$

$=4(-y)+4(5)+2$

$=4(-y+5)+2$

ولدينا: $9x\equiv 2[4]$ وبما أن $9\equiv 1[4]$

فإن $9x\equiv x[4]$ ومنه $x\equiv 2[4]$

حلول المعادلة (E): لدينا $x\equiv 2[4]$

معناه: $x=4k+2\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

بالتعويض في E نجد:

$9(4k+2)+4y=22$

ومنه $9\times 4k+4y=22-18$

أي $4y=-9\times 4k+4$

أي $y=-9k+1\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

إذن $(x,y)=(4k+2\,;-9k+1)\,;\ k\in\mathbb{Z}$

4) $N=\overline{133\alpha\beta 3}^{4}=\overline{56\alpha 0}^{7}$

معناه: $3+4\beta+16\alpha+3\times 4^3+3\times 4^4+4^5$

$=0+7\alpha+7^2\times 6+5\times 7^3$

أي $4\beta+16\alpha+1987=7\alpha+2009$

ومنه $9\alpha+4\beta=22$

إذن: $(\alpha;\beta)=(4k+2;-9k+1)$

لكن: $0\leq\alpha\leq 3$ و $0\leq\beta\leq 3$.

أي $0\leq 4k+2\leq 3$ و $0\leq -9k+1\leq 3$

ومنه $\begin{cases}-\frac{1}{2}\leq k\leq\frac{1}{4}\\ \frac{1}{9}\geq k\geq -\frac{2}{9}\end{cases}$ إذن $k=0$

ومنه $(\alpha;\beta)=(2,1)$

بالتعويض في N نجد: $N=7(2)+2009$

$=14+2009=2023=N$.

3) $a=88n+22$ و $b=198n+44$.

$d=PGCD(a,b)$.

أ- التحقق: لدينا:

$9a+4(-b)=9(88n+22)-4(198n+44)$

$=792n+198-792n-176$

$=22$

إذن: $(a;-b)$ حل للمعادلة (E).

ب- استنتاج قيم d: لدينا $d|a$ و $d|b$

ومنه $d|9a-4b$ أي $d|22$

ومنه $d\in D_{22}=\{22;11;2;1\}$

ج- التحقق: لدينا $a=22(4n+1)$ و $b=22(9n+2)$

إذن $22|a$ و $22|b$.

د- لدينا: $-4(9n+2)+9(4n+1)=9-8$

$=1$

إذن حسب مبرهنة بيزو العددان $(4n+1)$ و $(9n+2)$ أوليان فيما بينهما.

ومنه $PGCD(a,b)=22\,PGCD(9n+2;4n+1)$

$=22\times 1=22$

التمرين الثالث:

$f(x)=\frac{1-e^x}{x^2}$; $D_f=]0,+\infty[$

1- الحساب:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{e^x}{x^2}\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\left[\underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty}\times(-1)\left(\underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{1}\right)\right]$

$=-\infty$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لحامل محور التراتيب معادلته $x=0$.

2) $g(x)=2(1-e^{-x})-x$; $D_g=]0,+\infty[$

1/ دراسة إتجاه تغير الدالة g:

لدينا من أجل x من $]0,+\infty[$:

$g'(x)=2e^{-x}-1$.

لدينا: $2e^{-x}-1=0$ معناه: $2e^{-x}=1$ أي $e^{-x}=\frac{1}{2}$ ومنه $-x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ أي $\boxed{x=\ln 2}$

ولدينا $2e^{-x}-1>0$ معناه: $2e^{-x}>1$ أي $e^{-x}>\frac{1}{2}$ ومنه $-x>\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ إذن: $x<\ln 2$

ومنه:

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

وعليه g متزايدة تماما على المجال $]0;\ln 2]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\ln 2;+\infty[$.

جدول تغيراتها

x	0	$\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$0 \nearrow$	$1-\ln 2$	$\searrow -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

$g(\ln 2) = 1 - \ln 2$

ج- الدالة g موجبة في المجال $]0;\ln 2]$

ومتناقصة في المجال $[\ln 2;+\infty[$ و: $g(\ln 2)>0$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty < 0$

وبما أنها متناقصة تماما في هذا المجال

إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

ولدينا: $g(\ln 4) = \frac{3}{2} - \ln 4 > 0$

$g(\ln 6) = \frac{5}{3} - \ln 6 < 0$.

ومنه $\ln 4 < \alpha < \ln 6$.

د- إشارة $g(x)$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

3)-أ- المشتقة: من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما

$$f'(x) = \frac{-e^x(x^2) - 2x(1-e^x)}{(x^2)^2} = \frac{-x^2e^x + 2xe^x - 2x}{x^4}$$

$$= \frac{-xe^x + 2e^x - 2}{x^3}$$

$$= \frac{e^x}{x^3}\left(-x + 2 - 2e^{-x}\right)$$

$$= \frac{e^x}{x^3}\left(2(1-e^{-x}) - x\right) = \frac{e^x}{x^3} g(x)$$

ب- وعليه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ إذن الدالة f متزايدة تماما في المجال $]0;\alpha]$

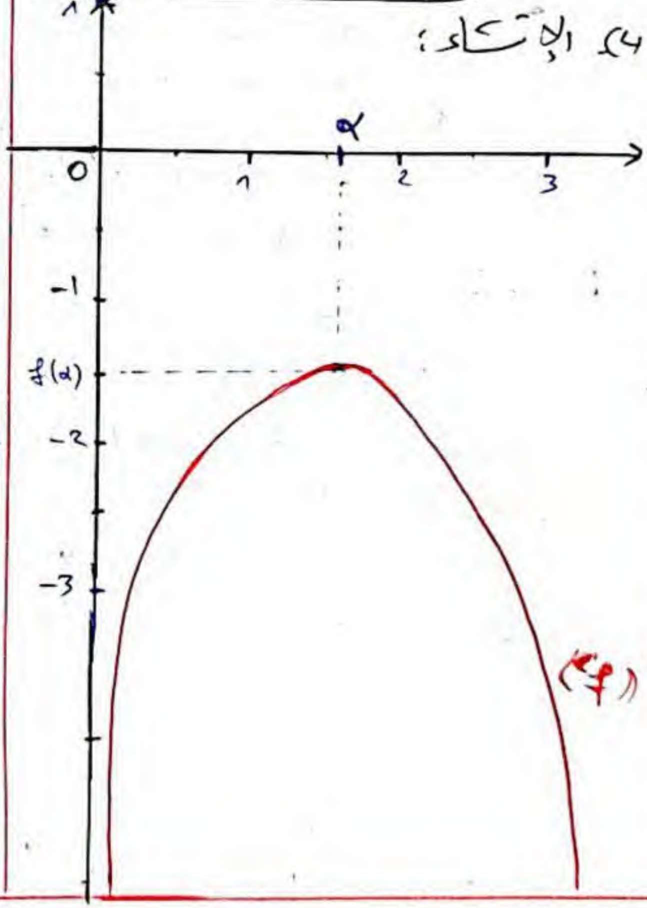
ومتناقصة تماما في المجال $[\alpha;+\infty[$.

جدول التغيرات

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow -\infty$

$f(\alpha) \simeq -1{,}5$

4) الإنشاء:



5-أ) $F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2}\,dt & ; x>0 \\ -\ln 2 & ; x=0. \end{cases}$

أ- الإثبات: من أجل كل $x>0$ لدينا:

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2}\,dt = \int_x^{2x} \frac{1}{t^2}\cdot(1-e^t)\,dt$$

بوضع: $\begin{cases} u(t) = 1-e^t \\ v'(t) = \frac{1}{t^2} \end{cases}$ فإن: $u'(t) = -e^t$; $v(t) = -\frac{1}{t}$.

وعليه

$$F(x) = \left[\frac{1-e^t}{-t}\right]_x^{2x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt$$

$$F(x) = \frac{e^{2x}-1}{2x} - \frac{e^x-1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt.$$

ب- التبيان: لدينا $0 < x \leq t \leq 2x$

ومنه $e^x \leq e^t \leq e^{2x}$ ومنه $\frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^{2x}}{t}$

إذن $\int_x^{2x} \frac{e^x}{t}\,dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{t}\,dt$

لدينا $\bullet \int_x^{2x} \frac{e^x}{t} = e^x \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt = e^x \left[\ln t\right]_x^{2x}$

$= e^x(\ln 2x - \ln x)$

$= e^x \ln 2$

و لدينا $\bullet \int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{t} = e^{2x} \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt = e^{2x} \left[\ln t\right]_x^{2x}$

$= e^{2x}(\ln 2x - \ln x) = e^{2x} \ln 2$

-08-