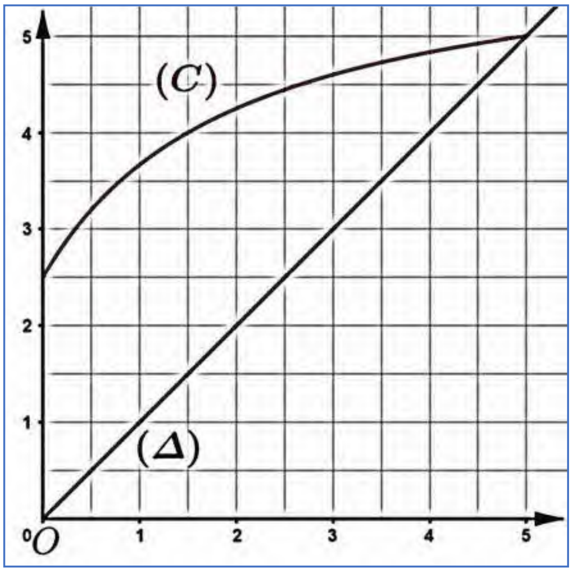
على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

الدالة f معرّفة على المجال $[0;5]$ بـ: $f(x)=\dfrac{6x+5}{x+2}$ و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس أنظر الشكل.



1) أ) اثبت أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;5]$.

ب) أثبت حسابيا أنّ (C) والمنصف الأول (Δ) ذا المعادلة $y=x$ متقاطعان في نقطة يطلب تعيين فاصلتها α.

2) نعرّف المتتالية (u_n) بـ: $u_0=0$، ومن أجل $n\in\mathbb{N}$، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) أنقل الشكل. ومثّل بيانيا الحدود u_0 ، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها، على حامل محور الفواصل مبرزا خطوط الإنشاء.

ب) أعط تخمينا فيما يخصّ اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

3) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_n<5$.

ب) برهن بالتراجع أنّ (u_n) متزايدة تماما واستنتج أنّ (u_n) متقاربة.

4) نعرّف المتتالية (v_n) من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=\dfrac{u_n+1}{u_n-5}$.

أ) اثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 7 وعيّن حدّها الأول، ثم أكتب بدلالة n عبارة الحد v_n، واحسب نهاية (v_n).

ب) عبّر عن الحد u_n بدلالة v_n، واستنتج نهاية (u_n).

جـ) احسب بدلالة n المجموعين: $s_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $L_n=u_0(v_0-1)+u_1(v_1-1)+...+u_n(v_n-1)$.

التمرين الثاني: (04.5 نقطة)

يحوي كيس غير شفاف 8 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللّمس، موزعة كما يلي: 3 كريات بيضاء مرقمة: α ، α و β و 3 كريات سوداء مرقمة: $-\alpha$، β و β واثنتان حمراوان مرقمتان: $-\alpha$ و α. حيث α و β عددان طبيعيان و $\alpha<\beta$.

نسحب عشوائيا من الكيس كريتين في آن واحد؛ ونعتبر الحوادث التالية: A:"الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم "،

B: " الحصول على كريتين مختلفتين في اللّون " و C: "الحصول على كريتين مجموع رقميهما موجب تماما".

1) أ) أحسب $p(A)$ احتمال الحدث A ثمّ بيّن أنّ: $p(B)=\dfrac{3}{4}$. ب) أحسب الاحتمالين $p(C)$ و $p(A\cap C)$.

2) نعتبر أن الأعداد: $-\alpha$، α و β بهذا الترتيب تشكل متتالية حسابية، وليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين المسجلين على الكريتين المسحوبتين.

أ) برّر أن مجموعة قيّم المتغير العشوائي X هي: $\{-2\alpha;0;2\alpha;4\alpha;6\alpha\}$.

ب) عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثمّ أحسب بدلالة α أمله الرياضياتي.

التمرين الثالث: (04.5 نقطة)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z^2+2z+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. النقط A، B، C و D لواحقها على الترتيب هي:

$z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-1-i\sqrt{3}$ و $z_D=\overline{z_C}$.

3) أ) أكتب على الشكل الأسي كل من الأعداد: z_A، z_B، z_C و z_D. واستنتج أنّ النقط A، B، C و D تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

ب) أثبت أنّ $\frac{z_A}{z_B}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ثمّ استنتج نوع المثلث OAB.

4) عيّن قيّم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_A)^n$ حقيقيا سالبا.

5) أ) عيّن (s) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $z=\sqrt{3}+i+k\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$، مع $k\in\mathbb{R}^+$.

ب) عيّن (d) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $\left|z-\sqrt{3}+i\right|=\left|z+1+i\sqrt{3}\right|$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعرّف الدالة g على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^3-x-2\ln x+3$.

1) أ) أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x)$.

2) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x؛ $3x^3-x-2=(x-1)(3x^2+3x+2)$.

ب) أدرس اتجاه تغير g وشكل جدول تغيراتها واستنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II) الدالة f معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}$. و$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ؛ ثمّ بيّن أنّ: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)=-\infty$ ، وفسّر النتيجة بيانيا.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ؛ $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$.

ب) استنتج اتجاه تغيرات f، وشكل جدول تغيراتها.

3) نعرّف الدالة h على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=x-1+\ln x$.

أ) أدرس اتجاه تغير الدالة h، وشكل جدول تغيراتها. (لا يطلب حساب النهايتين).

ب) أحسب $h(1)$ واستنتج إشارة $h(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$.

ج) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=x-1$ مقارب مائل لـ(C_f) بجوار $+\infty$، ثمّ حدّد وضعهما النسبي.

4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة $A(1;0)$.

5) أرسم المماس (T) والمستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

6) ليكن (D_m) مجموعة المستقيمات التي معادلاتها: $y=mx-m$ ، حيث m وسيط حقيقي.

أ) اثبت أنّ كل المستقيمات (D_m) تمرّ بالنقطة $A(1;0)$.

ب) عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة: $f(x)=mx-m$ حلين متمايزين.

7) أ) تحقق أنّ الدالة: $x\mapsto -\frac{1}{x}(1+\ln x)$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب) أحسب $\mathcal{A}$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين ذوي المعادلتين: $x=\frac{1}{2}$ و $x=2$.

انتهى الموضوع الأول

بالتوفيق

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعرّف المتتالية (u_n) بـ: $u_0=1$، ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{u_n}{2^n u_n+2}$.

1) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0<u_n$.
ب) برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما واستنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

2) نعرّف المتتالية (v_n) من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=\frac{1}{2^n u_n}$.
أ) بيّن أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{2}$ وعيّن حدها الأول.
ب) أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n.
ج) استنتج بدلالة n عبارة الحد العام u_n واستنتج النهاية $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
د) احسب بدلالة n المجموع: $s_n=u_0v_0+u_1v_1+\ldots+u_nv_n$.

3) نعرّف المتتالية (w_n) من أجل كل عدد طبيعي n، $w_n=\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$.
أ) بيّن أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.
ب) هل المتتاليتان (u_n) و (w_n) متجاورتان؟ برّر إجابتك.

التمرين الثاني: (04.5 نقطة)

يتكون فريق عمل من 4 رجال: H_1، H_2، H_3 و H_4 و 3 نساء: F_1، F_2 و F_3.
نريد اختيار لجنة تضم رئيسا، نائبا وأمينا.
ونعرّف الحوادث التالية:

A : "اللجنة من نفس الجنس " B : " الرئيس رجل والأمين امرأة ".
C: " H_4 رئيس للجنة " D : " اللجنة لا تضم H_4 و F_3 معًا".

1) بين أنّ عدد اللجان الممكنة هو 210.
2) أحسب الاحتمالين: $p(A)$ و $p(B)$.
3) أحسب: $p(C)$ و $p(D)$ وأثبت أنّ: $p(C\cap D)=\frac{2}{21}$.
4) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل اختيار عدد النساء خارج اللجنة المشكلة.
أ) عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X وعرّف قانون احتماله.
ب) أحسب أمله الرياضياتي وانحرافه المعياري.

التمرين الثالث: (4.5 نقطة)

1) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 13.
ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد A حيث: $A=7\times2025^{1446}+10\times1962^{1954}+2024^{1954}$ على 13.

2) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $5x-2y=13 \ldots\ldots (E)$.
أ) اثبت أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x\equiv1[2]$ ثمّ استنتج حلول المعادلة (E).
ب) جد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق x قاسم للعدد y.

3) عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $3^n+n+1\equiv2024[13]$ و $n\equiv1445[3]$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ: $f(x)=x+\frac{1}{2}\times\frac{e^x}{e^x-1}$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب) أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا.

2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{0\}$ ؛ $f'(x)=\frac{1}{2}\times\frac{(e^x-2)(2e^x-1)}{\left(e^x-1\right)^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير f وشكّل جدول تغيراتها.

3) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و(Δ).

ج) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=\frac{1}{2}$ ، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

د) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم المقارب (Δ') ذي المعادلة: $y=x+\frac{1}{2}$.

4) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x؛ $f(x)+f(-x)=\frac{1}{2}$ وفسّر النتيجة بيانيا.

5) أ) أرسم المقاربين (Δ) و(Δ') والمنحنى (C_f).

ب) ناقش بيانيا حسب قيّم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية:
$2(m-x)(e^x-1)e^{-x}=1$.

6) ليكن n عددا طبيعيا أكبر تماما من 1.
أحسب بدلالة n المساحة $A(n)$ لحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) المستقيم (Δ') والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=\ln(n)$ و $x=\ln(n+1)$.

انتهى الموضوع الثاني

بالتوفيق