الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
مديرية التربية لولاية جيجل
المقاطعة الأولى -جيجل

إمتحان البكالوريا التجريبي
دورة: مـــــاي 2024م
الشعبة: ريــاضيات

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 4 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأوّل:

التمرين الأول: (05 نقاط)

I/ في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب: $Z_A=1+i$ ، $Z_B=\overline{Z_A}$ ، $Z_C=-1+i$ و $Z_D=-Z_A$.

1/ ا/ أكتب كلا من العددين Z_A و Z_C على الشكل الأسي ثم استنتج الشكل الأسي لكل من Z_B و Z_D .

ب/ استنتج أن النقط A و B و C و D تنتمي إلى نفس الدائرة (Γ) معينا عناصرها المميزة.

2/ ا/ أكتب العدد $\dfrac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب/ عين صورة B بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$.

3/ بين أن مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z التي تحقق: $\overline{Z}=Z_Ae^{i\theta}$ بحيث θ عدد حقيقي يمسح $\mathbb{R}$ هي نفسها الدائرة (Γ) .

II/ نضع في وعاء عشرة كريات متماثلة لا يمكن التمييز بينها باللمس، مرقمة بالأعداد المركبة:
Z_A ، Z_B ، Z_C ، Z_D ، $3i$ ، $-3i$ ، 2 ، -2 ، $\sqrt{5}$ ، $-\sqrt{5}$.
نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من هذا الوعاء.

1/ أُحسب احتمال الحدثين: E «الكريتان المسحوبتان تحمل كل منهما عددا حقيقيا صرفا»
F «الكريتان المسحوبتان تحمل كل منهما عددا مركبا له عمدة θ حيث: $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$»

2/ ا/ أُحسب $P_F(E)$.

ب/ هل الحدثان E و F مستقلان؟ برّر إجابتك.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1/ عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n التي من أجلها يكون العدد: $M_n=4C_{n+1}^2-A_{n+3}^2+2$ مضاعفا للعدد 7 . (لاحظ أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $n^2+4n+3=(n+2)^2-1$)

2/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .

3/ ليكن العدد الطبيعي T_n الذي يُكتب في نظام العد ذو الأساس خمسة بالشكل: $T_n=\underbrace{\overline{111\cdots1}}_{\text{رقمًا }(n+1)}$.

ا/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4T_n=5^{n+1}-1$ ، ثم استنتج أن: $PGCD(T_n;5^n)=1$.

ب/ ليكن m عددا طبيعيا. بين أن: $(4T_n\equiv m\ [7])$ يكافئ $(T_n\equiv 2m\ [7])$.

ج/ استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد: $N = T_{2024} + 2T_{1445}$ على 7 .

4/ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $5^n x + T_n y = 1 \quad \cdots \quad (E_n)$.

- بين أن المعادلة (E_n) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$ ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_2) .

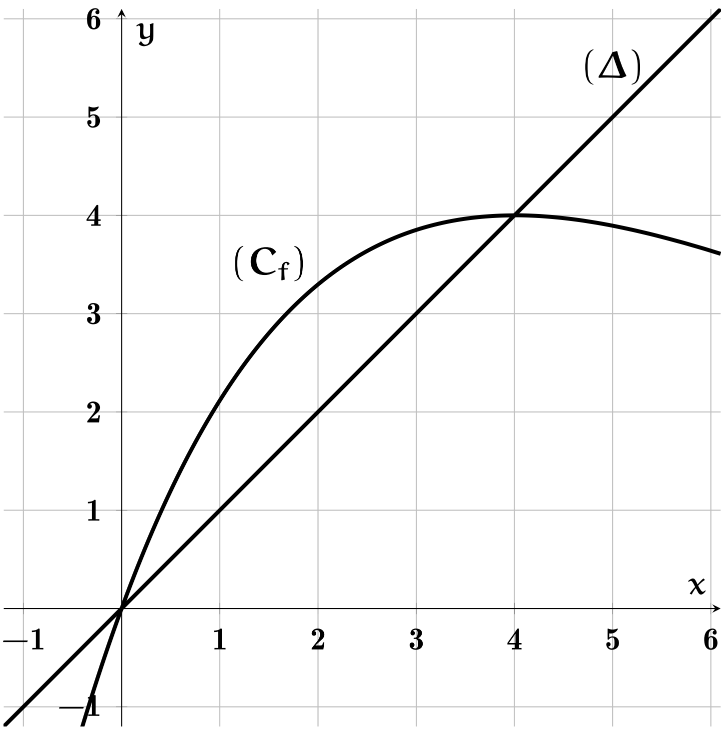
التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n e^{1-\frac{1}{4}u_n}$.

في الشكل المقابل المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث:

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = xe^{1-\frac{1}{4}x}$ ،

و (Δ) هو المستقيم ذو معادلة $y = x$.



1/ ا/ بقراءة بيانية، بين أنه من أجل كل x من المجال $[0;4]$ فإن: $f(x) \in [0;4]$.

ب/ أنقل الشكل المقابل، ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n).

(دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء)

ج/ ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ ا/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n \leq 4$.

ب/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ ثم استنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) .

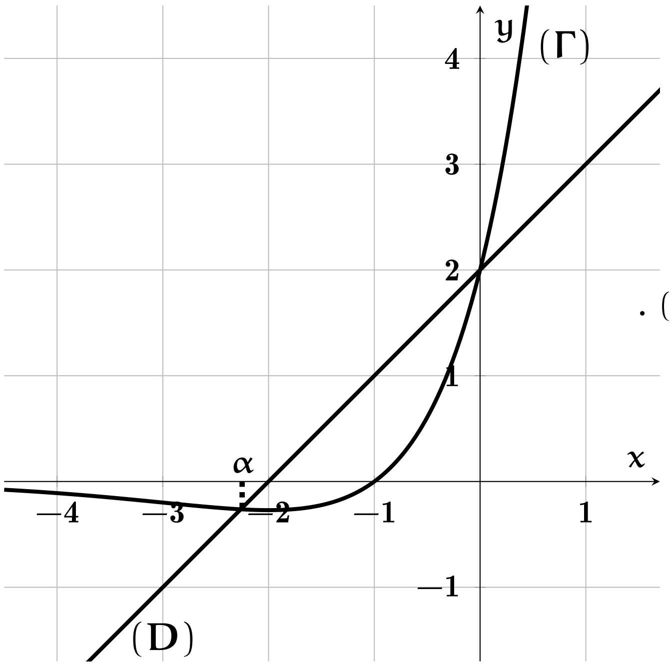
3/ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم أُحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4/ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نعتبر: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.

ا/ أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $u_n = e^{n-\frac{1}{4}S_n}$.

ب/ بين أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 4$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)



I/ في الشكل المقابل: (Γ) هو التمثيل البياني للدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $x \longmapsto (2x+2)e^x$

و (D) هو المستقيم ذو معادلة $y = x+2$.

(Γ) و (D) يتقاطعان في نقطتين فاصلتيهما 0 و α حيث $-2.3 < \alpha < -2.2$.

1/ بقراءة بيانية، حدد وضعية (Γ) بالنسبة إلى (D) .

2/ استنتج حسب قيم x من $\mathbb{R}$ إشارة:

$g(x) = -x-2+2(x+1)e^x$.

II/ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـالعبارة:

$$f(x) = x(e^x-1)^2$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ ا/ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

ج/ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

2/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $x(e^x-1) \geq 0$ ، ثم استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ وشكّل جدول تغيراتها.

3/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f''(x) = 2e^x g(x)$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف معينا فاصلتيهما.

4/ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 ، ثم أثبت أنه المماس الوحيد الذي يمر من المبدأ.

5/ ا/ أنشئ (Δ) و (C_f) بدقة. (الوحدة: $2cm$)

ب/ عين قيم العدد الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = mx$ ثلاثة حلول مختلفة.

6/ ا/ باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن: $\int_0^{\ln 2} x.e^x(e^x-2)dx = \frac{1}{4}(5-8\ln 2)$.

ب/ استنتج بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات: $x=0$ و $x=\ln 2$ و $y=x$.

انتهى الموضوع الأوّل.

الموضوع الثّاني:

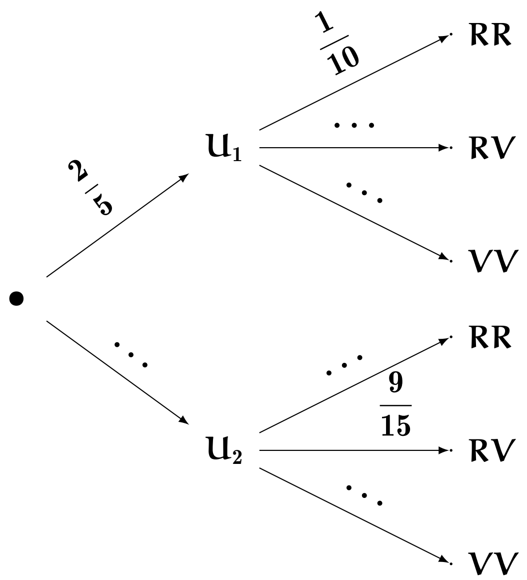
التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 كريتين حمراوين وثلاث كريات خضراء، ويحتوي صندوق U_2 ثلاث كريات حمراء و كريتين خضراوين؛ بحيث كل الكريات متماثلة، لا يمكن التفريق بينها باللمس.

نسحب ثلاث كريات كما يلي: نسحب كرية واحدة من الصندوق U_1 ونسجل لونها؛

فإذا كانت حمراء نعيدها إلى الصندوق U_1 ثم نسحب كريتين في آن واحد من U_1 ،

وإذا كانت خضراء نضعها داخل الصندوق U_2 ثم نسحب كريتين في آن واحد من U_2 .



1/ أنقل ثم أتمم شجرة الإحتمالات المقابلة:

(نرمز للكريات الحمراء بـ R وللخضراء بـ V)

2/ أُحسب احتمال الحدثين التاليين:

A «الكريات الثلاث المسحوبة من نفس اللون»

B «الحصول على كرية حمراء على الأقل»

3/ بيّن أن: $P_A(U_2) = \frac{3}{4}$.

4/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات عدد الكريات الخضراء المتبقية في الصندوق U_1 .

ا/ برّر أن قيم المتغير العشوائي X هي: 1 ، 2 و 3 .

ب/ عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أُحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

ج/ أُحسب الاحتمال: $P\left(C_3^X = 3\right)$.

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

I/ في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ؛ نعتبر النقط A ، I و C لواحقها على الترتيب: $Z_A = -2$ ، $Z_I = -1$ و $Z_C = i$.

(γ) الدائرة التي مركزها I ونصف قطرها 1 ، و B نقطة من (γ) حيث: $\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{8}$.

1/ علّم النقط A و I و C ، ثم أنشئ الدائرة (γ) . (الوحدة $2cm$)

2/ استنتج طويلة العدد المركب $Z_B + 1$ وبين أن عمدة له هي: $\frac{\pi}{4}$ ، ثم استنتج الشكل الجبري لـ Z_B .

3/ أثبت أن العدد $\frac{Z_B + 1}{i + 1}$ حقيقي. ماذا تستنتج؟

II/ نرفق بكل نقطة M تختلف عن I ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث: $Z' = \frac{i(Z+2)}{Z+1}$.

1/ ا/ أثبت أن $\arg(Z') = \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{MI};\overrightarrow{MA}\right)$.

ب/ عين مجموعة النقط M بحيث يكون Z' تخيليا صرفا.

2/ ا/ أثبت أن $Z' - i = \dfrac{i}{Z+1}$.

ب/ نضع $Z = -1 + e^{i\theta}$ حيث $\theta \in]-\pi;\pi]$.

- استنتج أنه عندما تمسح النقطة M الدائرة (γ) فإن النقطة M' تمسح دائرة (γ') يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

1/ ا/ عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2009^2 على 16 .

ب/ استنتج أن: $2009^{8001} \equiv 2009\ [16]$.

2/ نعرف المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$ كالتالي: $\begin{cases} u_0 = 2009^2 - 1 \\ u_{n+1} = (u_n+1)^5 - 1 \end{cases}$

ا/ بين أن u_0 يقبل القسمة على 5 .

ب/ بين باستعمال دستور ثنائي الحد أن: $u_{n+1} = u_n\left[u_n^4 + 5\left(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1\right)\right]$.

ج/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن u_n مضاعف لـ 5^{n+1} .

3/ ا/ تحقق أن: $u_3 = 2009^{250} - 1$.

ب/ استنتج أن: $2009^{250} \equiv 1\ [625]$ و $2009^{8001} \equiv 2009\ [625]$.

4/ ا/ لتكن a و b و c أعدادا صحيحة غير معدومة.
برهن أنه إذا كان a مضاعفا لـ b و c وكان $PGCD(b;c) = 1$ فإن a مضاعف للجداء bc.

ب/ بين أن: $2009^{8001} - 2009$ يقبل القسمة على 10000 .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I/ نعتبر g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$.

1/ أُدرس تغيرات الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.

2/ استنتج أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ يكون: $g(x) > 0$.

II/ لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $\begin{cases} f(x) = x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) + x + 1 \ ; \quad x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ ا/ بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = 1$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

/2 ا/ أدرس قابلية إشتقاق الدالة f على يمين 0 ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ يكون: $f'(x) = g(x) + 1$ ، ثم استنتج إتجاه تغير الدالة f وشكّل جدول تغيراتها.

/3 أُحسب $f(1)$ ، ثم أنشئ (Δ) و (C_f) بدقة. (الوحدة: $2cm$)

/4 ا/ بين أن الدالة F المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة: $F(x) = \frac{1}{2}xf(x) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + x$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ب/ استنتج بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات: $x = \frac{1}{2}$ و $x = 1$ و $y = 0$.

/5 لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

ا/ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون: $u_n = e^{f(n)-n-1}$.

ب/ أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما. [يمكنك الإستفادة من نتيجة السؤال (II / 2/ ب/)]

ج/ بيّن أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$ ، ماذا تستنتج؟

انتهى الموضوع الثاني.

رابط الإطلاع على الموضوع إلكترونيا، مع الإجابة النموذجية وسلم التنقيط:

(تُرفع الإجابة النموذجية بعد انتهاء فترة الإختبار مباشرة)

☺☺بالتوفيق للجميع في شهادة البكالوريا☺☺