



امتحان البكالوريا التجريبي

المدرسة العليا للأساتذة بورقلة
مصلحة النشاطات الثقافية والرياضية
دورة أفريل 2024
الشعبة: رياضيات
المادة: الرياضيات
المدة: 4 ساعات و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:
الموضوع الأول

التمرين الأول (4 ن)

نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E) المعرفة كما يلي

$$(E) : 650x - 732y = 486$$

1. أ. أحسب $PGCD(650; 732)$ ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل حولا في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

ب. تحقق أن الثنائية $(3; 2)$ حل للمعادلة (E) ثم استنتج مجموعة حلولها.

2. نعتبر L عددا طبيعيا يكتب $\overline{\alpha 0 \alpha \beta \beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 5 ويكتب $\overline{\beta 6 \beta 0}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث α و β عددان طبيعيان.

• عين كلاً من α و β ثم أكتب L في النظام العشري.

3. حلّ العدد 1962 إلى جداء عوامل أولية ثم استنتج قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $1962 \equiv 0 [n^2]$

4. نضع : $PGCD(a; b) = d$ و $PPCM(a; b) = m$ حيث $(a; b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

• عين كلّ الثنائيات $(a; b)$ التي تحقق

$$\begin{cases} m - 91d = 0 \\ a^2 + b^2 = 1962 \end{cases}$$

التمرين الثاني (4 ن)

المتتالية العددية (U_n) معرفة بـ $U_0 = 0$ ، ومن أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{3}{\sqrt{6 - U_n^2}}$

(I) 1. برهن بالتراجع أنه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $0 \leq U_n < \sqrt{3}$

2. أ. بين أنه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{(U_n^2 - 3)^2}{6 - U_n^2}$

ب. بين أن المتتالية (U_n) متزايدة على \mathbb{N} ثم استنتج أنها متقاربة.

(II) المتتالية العددية (V_n) معرفة على \mathbb{N} كما يلي : $V_n = \frac{U_n^2}{3 - U_n^2}$

1. أ. بين أن المتتالية (V_n) حسابية أساسها 1 ويطلب تعيين حدّها الأول V_0

ب. بين أنه من أجل كل n من \mathbb{N} : $U_n = \sqrt{\frac{3n}{n+1}}$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

2. من أجل كل n من \mathbb{N}^* نضع : $S_n = \frac{2024}{n + \sqrt{V_1}} + \frac{2024}{n + \sqrt{V_2}} + \dots + \frac{2024}{n + \sqrt{V_n}}$

أ. بين أنه من أجل كل n من \mathbb{N}^* : $\frac{2024n}{n + \sqrt{n}} \leq S_n \leq \frac{2024n}{n+1}$

ب. استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

التمرين الثالث (5 ن)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير

1. حلّ المعادلة التفاضلية $y'' = \pi^2 e^{\pi x + \pi}$ الذي يحقق $y(0) = e^\pi$ و $y'(-1) = \pi$ هو الدالة h المعرفة على \mathbb{R} كما يلي

أ) $h(x) = e^{\pi x + \pi}$ (أ) ب) $h(x) = \pi x + e^\pi$ (ب) ج) $h(x) = e^{\pi x + \pi} + \pi x$ (ج)

2. عدد الإمكانيات لتشكيل عدد مضاعف للعدد 5 ومكوّن من ثلاثة أرقام متميزة مثنى مثنى باستخدام مجموعة الأرقام $\{0; 1; 9; 5; 4\}$ هو

أ) 5 (أ) ب) 24 (ب) ج) 21 (ج)

3. إذا كان n عددا من \mathbb{N}^* فإن المجموع : $\int_1^2 \frac{\log x}{x} dx + \int_2^3 \frac{\log x}{x} dx + \dots + \int_n^{n+1} \frac{\log x}{x} dx$ يساوي

أ) $\frac{[\log(n+1)]^2}{2 \ln 10}$ (أ) ب) $\frac{\log(n+1)}{\ln 100}$ (ب) ج) $\frac{\ln(n+1) \times \log(n+1)}{2}$ (ج)

4. إذا كان z عددا مركّبا حيث $z = \sin \frac{\pi}{8} + i \cos \frac{\pi}{8}$ فإن

أ) $\arg(z) \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi]$ (أ) ب) $\arg(z) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$ (ب) ج) $\arg(z) \equiv \frac{5\pi}{8} [2\pi]$ (ج)

5. مجموعة حلول المتراجحة $4^x + 2^{x+1} \leq 3$ ذات المجهول الحقيقي x هي المجال

أ) $[0; +\infty[$ (أ) ب) $]-\infty; 0]$ (ب) ج) $[-3; 1]$ (ج)

التمرين الرابع (7 ن)

(I) الدالة العددية g معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = xe^{x-1} - 1$

- بين أن الدالة g متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$
- أ. بين أن المعادلة $g(x) = 1$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1, 3 < \alpha < 4$
- ب. استنتج حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$ إشارة العبارة : $g(x) - 1$

(II) الدالة العددية f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب : $f(x) = e^{x-1} - 2 \ln x - 1$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{j}\| = 1cm$

- أ. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ وفسّر النتيجة هندسياً ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x) - 1}{x}$

ج. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها

2. أ. أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها 1

ب. أنشئ كلاً من (T) و (C_f) . (تُعطى: $f(\alpha) \approx -0,2$)

ج. ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $e^x + e^{m+1}(x-1) = e(\ln x^2 + 1)$

3. نعتبر λ عدداً حقيقياً حيث $0 < \lambda < 1$

أ. أكتب بدلالة λ العدد $\mathcal{A}(\lambda)$ المعروف بـ: $\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(t)dt$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

ب. بين أنّ $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{A}(\lambda) = (2 - e^{-1}) cm^2$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4 ن)

صندوق به 6 بطاقات متماثلة لا نفرّق بينها عند اللمس، منها ثلاث بطاقات حمراء، بطاقتين خضراوين وبطاقة بيضاء. البطاقات الحمراء تحمل الحروف: E ، N و N ، البطاقتين الخضراوين تحملان الحرفين: N و S ، أما البيضاء تحمل الحرف S نسحب عشوائيا من الصندوق ثلاث بطاقات في آن واحد.

(I) 1. أحسب احتمال كلاً من الحدثين الآتيين

أ. A : "الحصول على بطاقتين من نفس اللون بالضبط".

ب. B : "الحصول على ثلاث بطاقات يُمكن أن تشكل كلمة ENS ".

2. أ. بين أن $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ ، ثم استنتج أن الحدثين A و B ليسا مستقلين.

ب. أحسب $P_A(\bar{B})$ (احتمال الحدث \bar{B} علما أن الحدث A محقق)

(II) نضيف إلى الصندوق n بطاقة تحمل الحرف E حيث $n \in \mathbb{N}^*$ ، ونسحب عشوائيا من الصندوق بطاقتين على التوالي

وبإرجاع، وليكن X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل سحب لبطاقتين عدد مرّات ظهور الحرف S

1. أ. برّر أن مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $\{0; 1; 2\}$

ب. عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X

2. عين قيمة العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $\frac{3}{8} = P\left(\int_0^x te^t dt = 1\right)$

التمرين الثاني (4 ن)

(I) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z : $(2iz + \sqrt{3} + i)(z^2 + 2z + 2) = 0$

(II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لاحقاتها

z_A ، z_B ، z_C و z_D على الترتيب حيث: $z_A = -1 + i$ ، $z_B = \bar{z}_A$ ، $2z_C = z_A \times (1 + i\sqrt{3})$ و $z_A + z_D = 0$

1. أ. أكتب z_A على الشكل المثلثي ثم استنتج كتابة z_C على الشكل المثلثي.

ب. أكتب z_C على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكلّ من $\cos \frac{13\pi}{12}$ و $\sin \frac{13\pi}{12}$

2. بين أن العدد المركب $\frac{z_B - z_D}{z_B - z_A}$ تخيلي صرف ثم استنتج طبيعة المثلث ADB

3. عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $\frac{\bar{z} - z_B}{\bar{z} - z_A} \times \frac{z - z_A}{z - z_B} = 1$

التمرين الثالث (5 ن)

المتتالية العددية (U_n) معرفة على \mathbb{N} كما يلي

$$\begin{cases} U_0 = 0 ; U_1 = 1 \\ U_{n+2} = 3U_{n+1} - 2U_n \end{cases}$$

1. من أجل كلّ n من \mathbb{N} نضع: $V_n = U_{n+1} - U_n$

أ. بين أن المتتالية (V_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل

- ب. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = 2^n - 1$
- ج. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $PGCD(U_n; U_{n+1}) = 1$
2. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $L_n = 3^n + (U_n + 1)^{2024} + U_n$
- أ. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2^n و 3^n على 5
- ب. بين أن العدد L_n يقبل القسمة على 5 إذا وفقط إذا كان العدد الطبيعي n فرديا.
3. أ. بين أنه من أجل كل n و p من \mathbb{N} حيث $n \geq p$: $U_n = 2^p \times U_{n-p} + U_p$
- ب. استنتج أن $PGCD(U_{1962}; U_{1954}) = 3$

التمرين الرابع (7 ن)

(I) الدالة العددية g معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$

- أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1; +\infty[$
 - أحسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$
- (II) الدالة العددية f معرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = \frac{2 \ln(e^x + 1)}{e^x} - 1$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- أ. أحسب كلاً من $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ مفسراً النتيجة هندسياً.
- ب. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من \mathbb{R} : $f'(x) = 2e^{-x} \times g(e^x)$
- ج. استنتج أن الدالة f متناقصة تماماً على \mathbb{R} ثم شكّل جدول تغيراتها.
- أ. بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,9 < \alpha < 1$
- ب. أنشئ المنحنى (C_f)
- أ. بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f(x) + f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$
- ب. استنتج دالة أصلية F للدالة f على \mathbb{R}

(III) المتتالية العددية (β_n) معرفة على \mathbb{N}^* كما يلي : $\beta_n = 2 \int_0^1 e^{-\frac{x}{n}} \ln(1 + e^x) dx$

- أ. أحسب β_1 ثم فسّر النتيجة هندسياً.
- ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\beta_n \leq 2 \ln(1 + e)$
- ج. بين أن المتتالية (β_n) متزايدة تماماً على \mathbb{N}^* ثم استنتج أنها متقاربة نحو عدد حقيقي l
- أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $(1 - e^{-\frac{1}{n}}) \ln 4^n \leq \beta_n \leq (1 - e^{-\frac{1}{n}}) \ln(1 + e)^{2n}$
- ب. استنتج حصرًا للعدد l

انتهى الموضوع الثاني



امتحان البكالوريا التجريبي

المدرسة العليا للأساتذة بورقلة
مصلحة النشاطات الثقافية والرياضية

دورة أفريل 2024

الشعبة: رياضيات

المادة: الرياضيات

المدة: 4 ساعات ونصف

الإيجابية النموذجية + سلم التنقيط

إجابة نموذجية مقترحة للموضوع الأول

التمرين الأول (4 ن)

1. أ. حساب $PGCD(650; 732)$ ثم استنتاج أن المعادلة (E) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ لدينا

$$732 = 650 \times 1 + 82$$

$$650 = 82 \times 7 + 76$$

$$82 = 76 \times 1 + 6$$

$$76 = 6 \times 12 + 4$$

$$6 = 4 \times 1 + 2$$

$$4 = 2 \times 2 + 0$$

ومنه $PGCD(650; 732) = 2$ ، وبما أن 2 يقسم 486 فإن المعادلة (E) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

ب. التحقق أن الثنائية (3; 2) حل للمعادلة (E) ثم استنتاج مجموعة حلولها. لدينا

$$650 \times 3 - 732 \times 2 = 486$$

ومنه

$$\begin{aligned} 650 \times 3 - 732 \times 2 &= 1950 - 1464 \\ &= 486 \end{aligned}$$

وبالتالي (3; 2) حل للمعادلة (E) وعندئذ لدينا

$$\begin{cases} 650x - 732y = 486 \\ 650 \times 3 - 732 \times 2 = 486 \end{cases}$$

ومنه

$$650(x - 3) - 732(y - 2) = 0$$

وعليه

$$325(x - 3) = 366(y - 2)$$

وبما أن $PGCD(350; 366) = 1$ فإن $325 \mid (y - 2)$ وينتج عن ذلك أن

$$\begin{cases} y = 325k + 2 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي S حيث

$$S = \{(366k + 3 ; 325k + 2) / k \in \mathbb{Z}\}$$

2. تعيين كلاً من α و β ثم كتابة L في النظام العشري. لدينا

$$\begin{aligned} L &= 9^3 \times \beta + 9^2 \times 6 + 9^1 \times \beta + 9^0 \times 0 \\ &= 738\beta + 486 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= 5^4 \times \alpha + 5^3 \times 0 + 5^2 \times \alpha + 5^1 \times \beta + 5^0 \times \beta \\ &= 650\alpha + 6\beta \end{aligned}$$

ومنه

$$650\alpha + 6\beta = 738\beta + 486$$

وعليه

$$650\alpha - 732\beta = 486$$

وبما أنّ

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha < 5 \\ 0 \leq \beta < 5 \end{cases}$$

فإنّ $\alpha = 3$ و $\beta = 2$ وبالتالي $L = 1962$

3. تحليل العدد 1962 إلى جداء عوامل أولية ثمّ استنتاج قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $1962 \equiv 0 [n^2]$ لدينا

$$\begin{array}{r|l} 1962 & 2 \\ 981 & 3 \\ 327 & 3 \\ 109 & 109 \\ 1 & \end{array}$$

ومنه $1962 = 2 \times 3^2 \times 109$ ونستنتج أنّ قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $1962 \equiv 0 [n^2]$ هي : 1 و 3

4. تعيين كلّ الثنائيات $(a; b)$ التي تحقق : $m - 91d = 0$ و $a^2 + b^2 = 1962$ لدينا

$$\begin{cases} m \times d = a \times b \\ a = d \times a' \\ b = d \times b' \\ PGCD(a'; b') = 1 \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} m = d \times a' \times b' \\ a = d \times a' \\ b = d \times b' \\ PGCD(a'; b') = 1 \end{cases}$$

وعليه

$$\begin{cases} d \times a' \times b' - 91d = 0 \\ (d \times a')^2 + (d \times b')^2 = 1962 \\ PGCD(a'; b') = 1 \end{cases}$$

وبالتالي

$$\begin{cases} a' \times b' = 91 \\ d^2 [(a')^2 + (b')^2] = 1962 \\ d \in \{1; 3\} \\ PGCD(a'; b') = 1 \end{cases}$$

ومن السؤال السابق نستنتج أنّ

$$\begin{cases} (a'; b') \in \{(1; 91); (7; 13); (13; 7); (91; 1)\} \\ d^2 [(a')^2 + (b')^2] = 1962 \\ d \in \{1; 3\} \end{cases}$$

وبما أن $91^2 > 1962$ و $7^2 + 13^2 = 218$ فإن

$$\begin{cases} (a'; b') \in \{(7; 13); (13; 7)\} \\ d = 3 \end{cases}$$

عندئذ لدينا

$$(a; b) \in \{(21; 39); (39; 21)\}$$

التمرين الثاني (4 ن)

(I) 1. البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n < \sqrt{3}$

• نرسم للخاصية " $U_n \geq 1$ " بالرمز $P(n)$.

• نتحقق من صحة $P(0)$

لدينا

$$U_0 = 0$$

ومنه

$$0 \leq U_0 < \sqrt{3}$$

وعليه $P(0)$ صحيحة.

• من أجل عدد طبيعي كفي k نفترض صحة $P(k)$ ونبرهن صحة $P(k+1)$.

لدينا

$$0 \leq U_k < \sqrt{3}$$

ومنه

$$0 \leq U_k^2 < 3$$

وعليه

$$3 < 6 - U_k^2 \leq 6$$

وبالتالي

$$\sqrt{3} < \sqrt{6 - U_k^2} \leq \sqrt{6}$$

ومنه

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \leq \frac{1}{\sqrt{6 - U_k^2}} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

وعليه

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{3}{\sqrt{6 - U_k^2}} < \frac{3}{\sqrt{3}}$$

أي

$$0 \leq \frac{3}{\sqrt{6 - U_k^2}} < \sqrt{3}$$

أي

$$0 \leq U_{k+1} < \sqrt{3}$$

وبالتالي $P(k+1)$ صحيحة.

• وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

2. أ. تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{(U_n^2 - 3)^2}{6 - U_n^2}$ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا

$$U_{n+1}^2 - U_n^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{6 - U_n^2}} \right)^2 - U_n^2$$

$$\begin{aligned}
U_{n+1}^2 - U_n^2 &= \frac{9}{6 - U_n^2} - U_n^2 \\
&= \frac{9}{6 - U_n^2} - U_n^2 \\
&= \frac{9 - 6U_n^2 + U_n^4}{6 - U_n^2} \\
&= \frac{(U_n^2 - 3)^2}{6 - U_n^2}
\end{aligned}$$

ب. تبين أن المتتالية (U_n) متزايدة على \mathbb{N} ثم استنتاج أنها متقاربة.
من أجل كل n من \mathbb{N} لدينا

$$U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{(U_n^2 - 3)^2}{6 - U_n^2}$$

وبما أن

$$0 \leq U_n < \sqrt{3}$$

فإن

$$\begin{cases} (U_n^2 - 3)^2 > 0 \\ 6 - U_n^2 > 0 \end{cases}$$

أي

$$U_{n+1}^2 - U_n^2 > 0$$

ومنه

$$U_{n+1}^2 \geq U_n^2$$

وبما أن $U_n \geq 0$ فإن

$$U_{n+1} \geq U_n$$

وبالتالي المتتالية (U_n) متزايدة على \mathbb{N}
الاستنتاج. لدينا

• من أجل كل n من \mathbb{N} لدينا

$$0 \leq U_n < \sqrt{3}$$

ومنه (U_n) محدودة من الأعلى بالعدد $\sqrt{3}$
• المتتالية (U_n) متزايدة على \mathbb{N}
عندئذ نستنتج أن (U_n) متقاربة.

(II) 1. أ. تبين أن المتتالية (V_n) حسابية أساسها 1 وتعيين حدّها الأول V_0
من أجل كل n من \mathbb{N} لدينا

$$\begin{aligned}
V_{n+1} &= \frac{U_{n+1}^2}{3 - U_{n+1}^2} \\
&= \frac{\left(\frac{3}{\sqrt{6 - U_n^2}}\right)^2}{3 - \left(\frac{3}{\sqrt{6 - U_n^2}}\right)^2} \\
&= \frac{\frac{9}{6 - U_n^2}}{3 - \frac{9}{6 - U_n^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{n+1} &= \frac{3}{3 - U_n^2} \\
 &= \frac{3 - U_n^2 + U_n^2}{3 - U_n^2} \\
 &= 1 + \frac{U_n^2}{3 - U_n^2} \\
 &= V_n + 1
 \end{aligned}$$

وعليه المتتالية (V_n) حسابية أساسها 1 وحدها الأول V_0 حيث

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \frac{U_0^2}{3 - U_0^2} \\
 &= \frac{U_0^2}{3 - U_0^2} \\
 &= \frac{0^2}{3 - 0^2} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ب. تبين أنه من أجل كل n من \mathbb{N} : $U_n = \sqrt{\frac{3n}{n+1}}$ ثم حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ من أجل كل n من \mathbb{N} لدينا

$$V_n = \frac{U_n^2}{3 - U_n^2}$$

وذلك يكافئ

$$(3 - U_n^2) V_n = U_n^2$$

ويكافئ

$$U_n^2 + V_n U_n^2 = 3V_n$$

وبما أن $V_n + 1 > 0$ فإن

$$U_n^2 (V_n + 1) = 3V_n$$

وبما أن $U_n \geq 0$ فإن

$$U_n = \sqrt{\frac{3V_n}{V_n + 1}}$$

وعليه

$$U_n = \sqrt{\frac{3n}{n+1}}$$

2. أ. تبين أنه من أجل كل n من \mathbb{N}^* : $\frac{2024n}{n + \sqrt{n}} \leq S_n \leq \frac{2024n}{n+1}$

من أجل كل n من \mathbb{N}^* لدينا

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{2024}{n + \sqrt{n}} \leq \frac{2024}{1 + \sqrt{V_1}} \leq \frac{2024}{n+1} \\
 \frac{2024}{n + \sqrt{n}} \leq \frac{2024}{1 + \sqrt{V_2}} \leq \frac{2024}{n+1} \\
 \vdots \\
 \frac{2024}{n + \sqrt{n}} \leq \frac{2024}{1 + \sqrt{V_n}} \leq \frac{2024}{n+1}
 \end{array} \right.$$

ومنه

$$\frac{2024}{n + \sqrt{n}} + \frac{2024}{n + \sqrt{n}} + \dots + \frac{2024}{n + \sqrt{n}} \leq S_n \leq \frac{2024n}{n + 1} + \frac{2024}{n + 1} + \dots + \frac{2024}{n + 1}$$

وعليه

$$\frac{2024n}{n + \sqrt{n}} \leq S_n \leq \frac{2024n}{n + 1}$$

ب. استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

من أجل كل n من \mathbb{N}^* لدينا

$$\frac{2024n}{n + \sqrt{n}} \leq S_n \leq \frac{2024n}{n + 1}$$

ولدينا

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2024n}{n + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2024}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} = 2024$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2024n}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2024n}{n} = 2024$$

ومنه

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2024$$

التمرين الثالث (5 نون)

1. الجواب هو أ

التبرير. الدالة $x \mapsto \pi^2 e^{\pi x + \pi}$ مستمرة على \mathbb{R} ومنه حلول المعادلة التفاضلية $y'' = \pi^2 e^{\pi x + \pi}$ هي الدوال $x \mapsto e^{\pi x + \pi} + c_1 x + c_2$ مع c_1 و c_2 عدداً حقيقياً ثابتان، ولدينا

$$\begin{cases} y(0) = e^\pi \\ y'(-1) = \pi \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} e^{\pi \times 0 + \pi} + c_1 \times 0 + c_2 = e^\pi \\ \pi e^{\pi \times (-1) + \pi} + c_1 = \pi \end{cases}$$

وعليه

$$\begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

وبالتالي حلّ المعادلة التفاضلية هو الدالة h المعرفة على \mathbb{R} كما يلي $h(x) = e^{\pi x + \pi}$

2. الجواب هو ج

$$A_4^2 \times A_1^1 + A_3^1 \times A_3^1 \times A_1^1 = 21$$

3. الجواب هو ج

التبرير. الدالة $x \mapsto \frac{\log x}{x}$ مستمرة على المجال $[1; n + 1]$ ولدينا

$$\int_1^2 \frac{\log x}{x} dx + \int_2^3 \frac{\log x}{x} dx + \dots + \int_n^{n+1} \frac{\log x}{x} dx = \int_1^{n+1} \frac{\log x}{x} dx = \frac{1}{\ln 10} \int_1^{n+1} \left(\frac{1}{x} \times \ln x \right) dx$$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{\log x}{x} dx + \int_2^3 \frac{\log x}{x} dx + \dots + \int_n^{n+1} \frac{\log x}{x} dx &= \int_1^{n+1} \frac{\log x}{x} dx \\
&= \frac{1}{\ln 10} \int_1^{n+1} \left(\frac{1}{x} \times \ln x \right) dx \\
&= \frac{1}{2 \ln 10} [(\ln x)^2]_1^{n+1} \\
&= \frac{\ln(n+1) \times \ln(n+1)}{2 \ln 10} \\
&= \frac{\ln(n+1) \times \log(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

4. الجواب هو أ
التبرير: لدينا

$$\begin{aligned}
z &= \sin \frac{\pi}{8} + i \cos \frac{\pi}{8} \\
&= i \left(\cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8} \right) \\
&= i \left[\cos \left(-\frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{8} \right) \right]
\end{aligned}$$

ومنه

$$\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} [2\pi]$$

وعليه

$$\arg(z) \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi]$$

5. الجواب هو ب
التبرير: المتراجحة تكافئ

$$(2^x)^2 + 2 \times 2^x - 3 \leq 0$$

وبوضع $t = 2^x$ ينتج

$$t^2 + 2t - 3 \leq 0$$

وذلك يكافئ

$$-3 \leq t \leq 1$$

ويكافئ

$$2^x \leq 1$$

ويكافئ

$$x \in]-\infty; 0]$$

التمرين الرابع (7 نون)

(I) 1. تبين أن الدالة g متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدينا

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \times e^{x-1} + e^{x-1} \times x \\ &= (x+1)e^{x-1} \end{aligned}$$

ومن أجل كل x من $]0; +\infty[$ لدينا

$$(x+1)e^{x-1} > 0$$

أي $g'(x) > 0$ على $]0; +\infty[$ ، وبالتالي g متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$

2. أ. تبين أن المعادلة $g(x) = 1$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1,3 < \alpha < 1,4$

• g مستمرة على $]0; +\infty[$.

• g متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$.

• لدينا

$$g(1,3) \approx 0,22$$

$$g(1,4) \approx 1,09$$

ومنه $g(1,3) < 1 < g(1,4)$

عندئذ نستنتج أن المعادلة $g(x) = 1$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1,3 < \alpha < 1,4$.

ب. استنتاج إشارة العبارة : $g(x) - 1$ على المجال $]0; +\infty[$

لدينا

• g متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$.

• $g(\alpha) - 1 = 0$.

عندئذ يمكن استنتاج إشارة $g(x) - 1$ في جدول كما يأتي

x	0	α	$+\infty$
$g(x) - 1$		-	0

(II) 1. أ. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسياً ثم حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

لدينا

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{x-1} - 2 \ln x - 1)$$

وبما أن $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

التفسير الهندسي. المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (حامل محور الترتيب) هو مستقيم مقارب لـ (C_f) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ لدينا

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x-1} - 2 \ln x - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{e^x}{x} \times e^{-1} - 2 \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right) \right] \end{aligned}$$

وبما أنّ

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

فإنّ

ب. تبين أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x) - 1}{x}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدينا

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x-1} - \frac{2}{x} \\ &= \frac{xe^{x-1} - 2}{x} \\ &= \frac{g(x) - 1}{x} \end{aligned}$$

ج. دراسة اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها

بما أنّ $x > 0$ فإنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x) - 1$ وعندئذ لدينا

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
			+

- $f'(x) < 0$ على $]0; \alpha[$ ، ومنه الدالة f متناقصة تماما على $]0; \alpha[$
- $f'(x) > 0$ على $]\alpha; +\infty[$ ، ومنه الدالة f متزايدة تماما على $]\alpha; +\infty[$

شكل جدول التغيّرات

x	0	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

2. أ. كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي فصلتها 1.

الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1، ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه $f'(1)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 ونكتب

$$(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

ولدينا

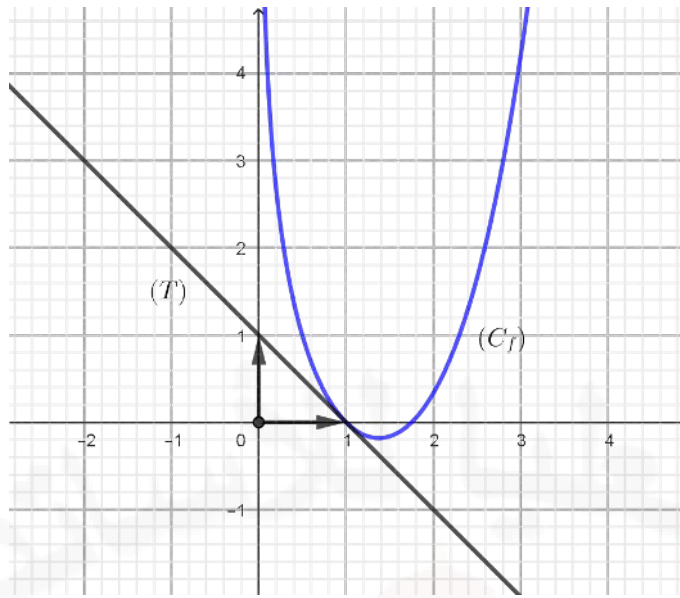
$$\begin{aligned} f'(1) &= \frac{1 \times e^{1-1} - 2}{1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= e^{1-1} - 2 \ln 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

وبالتالي

$$(T) : y = -x + 1$$

ب. إنشاء كلاً من (T) و (C_f) .



ج. مناقشة حلول المعادلة $e^x + e^{m+1}(x-1) = e(\ln x^2 + 1)$ بيانياً
المعادلة

$$e^x + e^{m+1}(x-1) = e(\ln x^2 + 1)$$

تكافئ

$$e^{x-1} + e^m(x-1) = 2\ln x + 1$$

وتكافئ

$$f(x) = -e^m(x-1)$$

لدينا

$$f(x) = -|m|x$$

وبالتالي حلول المعادلة بيانياً هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) حيث

$$(\Delta_m) : y = -e^m(x-1)$$

من أجل كل m من \mathbb{R} المستقيم (Δ_m) يشمل النقطة $A(1; 0)$ ، وبوضع $m' = -e^m$ ينتج

عدد حلول المعادلة	قيم m	في حالة
حلان	$m \in]0; +\infty[$	$m' \in]-\infty; -1[$
حل واحد	$m = 0$	$m' = -1$
حلان	$m \in]-\infty; 0[$	$m' \in]-1; 0[$

3. أ. كتابة العدد $A(\lambda)$ بدلالة λ ثم تفسير النتيجة هندسياً.

الدالة f مستمرة على المجال $[\lambda; 1]$ ، عندئذ لدينا

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \int_{\lambda}^1 f(t) dt \\ &= \int_{\lambda}^1 (e^{t-1} - 2\ln t - 1) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda) &= [e^{t-1} - 2t \ln t + t]_{\lambda}^1 \\ &= -e^{\lambda-1} + \lambda + 2\lambda \ln \lambda + 2 \end{aligned}$$

بما أن الدالة موجبة على المجال $[\lambda; 1]$ فإن النتيجة تُفسّر هندسيا بأنها مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات : $x = 1$ و $x = \lambda$ ، $y = 0$

ب. تبين أن $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{A}(\lambda) = (2 - e^{-1}) cm^2$

لدينا

$$\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{A}(\lambda) = \lim_{x \rightarrow 0} (-e^{\lambda-1} + \lambda + 2\lambda \ln \lambda + 2) cm^2$$

وبما أن $\lim_{x \rightarrow 0} (\lambda \ln \lambda) = 0$ فإن

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{A}(\lambda) = (2 - e^{-1}) cm^2$$

سلم تنقيط الموضوع الأول

التمرين الأول (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
أ.1	$0,25 + 0,25$
ب.1	$0,25 + 0,25$
2	$0,25 \times 6$
3	$0,5 + 0,5$
4	$0,25 + 0,25$

التمرين الثاني (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1 (I)	$0,25 + 0,5 + 0,25$
أ.2 (I)	$0,5$
ب.2 (I)	$0,25 + 0,5$
أ.1 (II)	$0,25 + 0,5$
ب.1 (II)	$0,25 + 0,25$
أ.2 (II)	$0,25$
ب.2 (II)	$0,25$

التمرين الثالث (5 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1	$0,5 + 0,5$
2	$0,5 + 0,5$
3	$0,5 + 0,5$
4	$0,5 + 0,5$
5	$0,5 + 0,5$

التمرين الرابع (7 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1 (I)	$0,25 + 0,25$
أ.2 (I)	$0,25 + 0,25 + 0,25$
ب.2 (I)	$0,25 + 0,25$
أ.1 (II)	$0,5 + 0,25 + 0,25$
ب.1 (II)	$0,75$
ج.1 (II)	$0,5 + 0,5$
أ.2 (II)	$0,5$
ب.2 (II)	$0,5 + 0,25$
ج.2 (II)	$0,25$
أ.3 (II)	$0,25 + 0,5$
ب.3 (II)	$0,25$

إجابة نموذجية مقترحة للموضوع الثاني

التمرين الأول (4 ن)

(I) 1. حساب احتمال كُلا من الحدثين A و B
 أ. A : " الحصول على بطاقتين من نفس اللون بالضبط ".

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد الإمكانيات}} \\ &= \frac{C_3^2 \times C_3^1 + C_2^2 \times C_4^1}{C_6^3} \\ &= \frac{13}{20} \end{aligned}$$

ب. B : " الحصول على ثلاث بطاقات يُمكن أن تشكل كلمة ENS ".

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{\text{عدد عناصر } B}{\text{عدد الإمكانيات}} \\ &= \frac{C_1^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_6^3} \\ &= \frac{6}{20} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

2. أ. تبين أن $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ ، ثم استنتاج أن الحدثين A و B ليسا مستقلين.

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{\text{عدد عناصر } A \cap B}{\text{عدد الإمكانيات}} \\ &= \frac{C_1^1 \times C_2^1 \times C_2^1 + C_1^1 \times C_2^2}{C_6^3} \\ &= \frac{5}{20} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

وبما أن $\frac{1}{4} \neq \frac{13}{20} \times \frac{3}{10}$ أي $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ فإن A و B ليسا مستقلين.

ب. حساب $P_A(\bar{B})$ (احتمال الحدث \bar{B} علما أن الحدث A محقق)

$$\begin{aligned} P_A(\bar{B}) &= 1 - P_A(B) \\ &= 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{13}{20}} \\ &= \frac{8}{13} \end{aligned}$$

(II) 1. أ. تبرير أن مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $\{0; 1; 2\}$

عدد مرّات ظهور الحرف S	الإمكانية S
0	$\bar{S}\bar{S}$
1	$S\bar{S}$
2	SS

ب. تعريف قانون احتمال المتغير العشوائي X

• الحدث $\{X = 0\}$

$$P(X = 0) = \frac{(n+4)^2}{(n+6)^2}$$

• الحدث $\{X = 1\}$

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \frac{2 \times 2^1 \times (n+4)^1}{(n+6)^2} \\ &= \frac{4n+16}{(n+6)^2} \end{aligned}$$

• الحدث $\{X = 2\}$

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= \frac{2^2}{(n+6)^2} \\ &= \frac{4}{(n+6)^2} \end{aligned}$$

وينتج عن ذلك ما يلي

x_i	0	1	2	المجموع
$P(X = x_i)$	$\frac{(n+4)^2}{(n+6)^2}$	$\frac{4n+16}{(n+6)^2}$	$\frac{4}{(n+6)^2}$	1

2. تعيين قيمة العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $P\left(\int_0^X te^t dt = 1\right) = \frac{3}{8}$

المتراجحة

$$\int_0^X te^t dt = 1$$

تكافئ

$$Xe^X - e^X + 1 = 1$$

وتكافئ

$$e^X (X - 1) = 0$$

وتكافئ

$$X = 1$$

وعليه المعادلة

$$P\left(\int_0^X te^t dt = 1\right) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 1) = \frac{3}{8}$$

تكافئ

وتكافئ

$$\frac{4n + 16}{(n + 6)^2} = \frac{3}{8}$$

وتكافئ

$$3n^2 + 4n - 20 = 0$$

وتكافئ

$$n = 2$$

التمرين الثاني (4 ن)

(I) حل المعادلة $(z^2 + 2z + 2) = 0$ في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة

$$(2iz - \sqrt{3} + i)(z^2 + 2z + 2) = 0$$

تكافئ

$$2iz - \sqrt{3} + i = 0 \quad \text{أو} \quad z^2 + 2z + 2 = 0$$

حل المعادلة $z^2 + 2z + 2 = 0$ لدينا

$$\begin{aligned} \Delta &= 2^2 - 4 \times 1 \times 2 \\ &= -4 \\ &= 4i^2 \\ &= (2i)^2 \end{aligned}$$

وبالتالي المعادلة تقبل حلين z_1 و z_2 حيث

$$\begin{aligned} z_2 &= \overline{z_1} \\ &= -1 + i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-2 - 2i}{2 \times 1} \\ &= -1 - i \end{aligned}$$

حل المعادلة $2iz + \sqrt{3} + i = 0$ المعادلة تكافئ

وتكافئ

$$2iz + \sqrt{3} = -i$$

$$2iz + \sqrt{3} = i$$

وتكافئ

$$iz = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

وتكافئ

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي $\left\{ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -1 - i; -1 + i \right\}$

(II) 1. أ. كتابة z_A على الشكل المثلثي ثم استنتاج كتابة z_C على الشكل المثلثي. لدينا

$$\begin{aligned} |z_A| &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

ونعتبر θ عمدة للعدد z_A ، عندئذ لدينا

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

ومنه

$$z_A = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

ولدينا

$$\arg \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\left| \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = 1$$

عندئذ نستنتج

$$\begin{aligned} \arg(z_C) &\equiv \arg(z_A) + \arg \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) [2\pi] \\ &\equiv \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} [2\pi] \\ &\equiv \frac{13\pi}{12} [2\pi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z_C| &= |z_A| \times \left| \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| \\ &= \sqrt{2} \times 1 \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

وبالتالي

$$z_C = \sqrt{2} \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} \right)$$

ب. كتابة z_C على الشكل الجبري ثم استنتاج القيمة المضبوطة لكل من $\cos \frac{13\pi}{12}$ و $\sin \frac{13\pi}{12}$

$$\begin{aligned} z_C &= (-1 + i) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

وعندئذ نستنتج أن

$$\cos \frac{13\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\sin \frac{13\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

2. تبين أن العدد المركب $\frac{z_B - z_D}{z_B - z_A}$ تخيلي صرف ثم استنتاج طبيعة المثلث ADB لدينا

$$\begin{aligned} \frac{z_B - z_D}{z_B - z_A} &= \frac{\overline{z_A} + z_A}{z_A - z_A} \\ &= \frac{-1 - i - 1 + i}{-1 - i + 1 - i} \\ &= \frac{-2}{-2i} \\ &= -i \end{aligned}$$

ومنه العدد المركب $\frac{z_B - z_D}{z_B - z_A}$ تخيلي صرف ونستنتج أن

$$\left| \frac{z_B - z_D}{z_B - z_A} \right| = 1 \quad \text{و} \quad \arg \left(\frac{z_B - z_D}{z_B - z_A} \right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

أي

$$DB = AB \quad \text{و} \quad (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{DB}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

عندئذ نستنتج أن المثلث ADB قائم في B ومتساوي الساقين.

3. تعيين (Γ) مجموعة النقاط M من المستوي ذات الألفة z حيث : $\frac{\bar{z} - z_B}{\bar{z} - z_A} \times \frac{z - z_A}{z - z_B} = 1$

لدينا $\frac{\bar{z} - z_B}{\bar{z} - z_A} \times \frac{z - z_A}{z - z_B} = 1$ وذلك يكافئ

$$\frac{\overline{z - z_A}}{z - z_B} \times \frac{z - z_A}{z - z_B} = 1$$

ويكافئ

$$\frac{|z - z_A|^2}{|z - z_B|^2} = 1$$

ويكافئ

$$|z - z_A|^2 = |z - z_B|^2$$

ويكافئ

$$|z - z_A| = |z - z_B|$$

ويكافئ

$$AM = BM$$

وبالتالي مجموعة النقاط (Γ) هي المستقيم المحوري للقطعة $[AB]$

التمرين الثالث (5 ن)

1. أ. تبين أن المتتالية (V_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول من أجل كل عدد طبيعي n لدينا

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+2} - U_{n+1} \\ &= 3U_{n+1} - 2U_n - U_{n+1} \\ &= 2U_{n+1} - 2U_n \\ &= 2(U_{n+1} - U_n) \\ &= 2V_n \end{aligned}$$

ومنه المتتالية (V_n) هندسية أساسها 2 وحدّها الأول V_0 حيث

$$\begin{aligned} V_0 &= U_1 - U_0 \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ب. البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $U_n = 2^n - 1$.

• نرسم للخاصية " $U_n = 2^n - 1$ " بالرمز $P(n)$.

• نتحقق من صحة $P(0)$ لدينا

$$\begin{aligned} 2^0 - 1 &= 1 \\ &= U_0 \end{aligned}$$

ومنه $P(0)$ صحيحة.

• من أجل عدد طبيعي كفي k نفترض صحة $P(k)$ ونبرهن صحة $P(k+1)$.
لدينا

$$\begin{aligned} U_{k+1} &= V_k + U_k \\ &= 2^k + 2^k - 1 \\ &= 2 \times 2^k - 1 \\ &= 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

وعليه $P(k+1)$ صحيحة.

• حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ج. استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $PGCD(U_n; U_{n+1}) = 1$
من أجل كل عدد طبيعي n لدينا

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= 2^{n+1} - 1 \\ &= 2 \times 2^n - 1 \\ &= 2(2^n - 1 + 1) - 1 \\ &= 2U_n + 2 - 1 \\ &= 2U_n + 1 \end{aligned}$$

ومنه

$$U_{n+1} - 2U_n = 1$$

وبالتالي حسب مبرهنة بيزو ينتج أن $PGCD(U_n; U_{n+1}) = 1$

2. أ. دراسة بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2^n و 3^n على 5 حسب قيم العدد الطبيعي n

<p style="text-align: center;">لدينا</p> $\begin{cases} 3^0 \equiv 1 [5] \\ 3^1 \equiv 3 [5] \\ 3^2 \equiv 4 [5] \\ 3^3 \equiv 2 [5] \\ 3^4 \equiv 1 [5] \end{cases}$ <p style="text-align: center;">وعليه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا</p> $\begin{cases} 3^{4k} \equiv 1 [5] \\ 3^{4k+1} \equiv 3 [5] \\ 3^{4k+2} \equiv 4 [5] \\ 3^{4k+3} \equiv 2 [5] \end{cases}$	<p style="text-align: center;">لدينا</p> $\begin{cases} 2^0 \equiv 1 [5] \\ 2^1 \equiv 2 [5] \\ 2^2 \equiv 4 [5] \\ 2^3 \equiv 3 [5] \\ 2^4 \equiv 1 [5] \end{cases}$ <p style="text-align: center;">وعليه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا</p> $\begin{cases} 2^{4k} \equiv 1 [5] \\ 2^{4k+1} \equiv 2 [5] \\ 2^{4k+2} \equiv 4 [5] \\ 2^{4k+3} \equiv 3 [5] \end{cases}$
--	--

ب. تبين أن العدد L_n يقبل القسمة على 5 إذا فقط إذا كان العدد الطبيعي n فرديا.
لدينا

$$L_n \equiv 0 [5]$$

وذلك يكافئ

$$3^n + (2^n)^{2024} + 2^n - 1 \equiv 0 [5]$$

ويكافئ

$$3^n + (2^{2024})^n + 2^n - 1 \equiv 0 [5]$$

ويكافئ

$$3^n + 1^n + 2^n - 1 \equiv 0 [5]$$

ويكافئ

$$3^n + 2^n \equiv 0 [5]$$

ويكافئ

$$n \in \{4k + 1; 4k + 3/k \in \mathbb{N}\}$$

ويكافئ

$$n \in \{2 \times 2k + 1; 2(2k + 1) + 1 / k \in \mathbb{N}\}$$

ويكافئ أن العدد n فردي.3. أ. تبين أنه من أجل كل n و p من \mathbb{N} حيث $n \geq p$: $U_n = 2^p \times U_{n-p} + U_p$ من أجل كل n و p من \mathbb{N} حيث $n \geq p$ لدينا

$$\begin{aligned} 2^p \times U_{n-p} + U_p &= 2^p (2^{n-p} - 1) + 2^p - 1 \\ &= 2^{p+n-p} - 2^p + 2^p - 1 \\ &= 2^n - 1 \\ &= U_n \end{aligned}$$

ب. استنتاج أن $PGCD(U_{1962}; U_{1954}) = 3$ من السؤال السابق نستنتج من أجل كل n و p من \mathbb{N} حيث $n \geq p$ أن

$$PGCD(U_{n+p}; U_n) = PGCD(U_n; U_p)$$

وعليه

$$\begin{aligned} PGCD(U_{1962}; U_{1954}) &= PGCD(U_{1954}; U_8) \\ &= PGCD(U_{1946}; U_8) \\ &\vdots \\ &= PGCD(U_8; U_2) \\ &= PGCD(U_2; U_2) \\ &= U_2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

التمرين الرابع (7 ن)

1. (I) دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1; +\infty[$ قابلة للاشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ ولدينا

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1 \times (x+1) - 1 \times x}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{-x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ لدينا

$$(x+1)^2 > 0$$

ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة البسط $-x$ وعندئذ لدينا

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-

- $g'(x) > 0$ على $]-1; 0[$ و $g'(0) = 0$ ، ومنه الدالة g متزايدة تماما على $]-1; 0]$.
 - $g'(x) < 0$ على $]0; +\infty[$ و $g'(0) = 0$ ، ومنه الدالة g متناقصة تماما على $]0; +\infty[$.
2. حساب $g(0)$ ثم استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$ لدينا

$$g(0) = \frac{0}{0+1} - \ln(0+1) = 0$$

وبما أن الدالة $g(0)$ قيمة حدية صغرى للدالة g عندئذ نستنتج ما يلي

x	-1	0	$+\infty$
$g(x)$		0	-

- (II) 1. أ. حساب كلاً من $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ مفسراً النتيجة هندسياً. لدينا

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln(e^x + 1)}{e^x} - 1 \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{2 \ln t}{t-1} - 1 \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{2t}{t-1} \times \frac{\ln(t)}{t} - 1 \right] \end{aligned}$$

وبما أن

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2t}{t-1} = 2 \end{cases}$$

فإن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

وتُفسر النتيجة هندسياً بأن المستقيم ذو المعادلة $y = -1$ والموازي لحامل محور الفواصل هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ ولدينا

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2 \ln(e^x + 1)}{e^x} - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2 \ln(t+1)}{t} - 1 \right] \end{aligned}$$

وبما أن

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$$

فإن

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

وتُفسر النتيجة هندسياً بأن المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ والموازي لحامل محور الفواصل هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

ب. تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من \mathbb{R} : $f'(x) = 2e^{-x} \times g(e^x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا

$$f'(x) = -2e^{-x} \times \ln(e^x + 1) + 2e^{-x} \times \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$= 2e^{-x} \left[\frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(e^x + 1) \right]$$

$$= 2e^{-x} \times g(e^x)$$

ج. استنتاج أن الدالة f متناقصة تماما على \mathbb{R} ثم تشكيل جدول تغيراتها.

من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا

$$2e^{-x} > 0$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(e^x)$.

المترابحة $g(e^x) \leq 0$ تكافئ $e^x > 0$ وتكافئ $x \in]-\infty; +\infty[$ وعندئذ لدينا

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	

• $f'(x) < 0$ على \mathbb{R} ومنه الدالة f متناقصة تماما على \mathbb{R}

تشكيل جدول التغيرات

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	1	-1

2. أ. تبين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,9 < \alpha < 1$

• الدالة g مستمرة على \mathbb{R}

• الدالة g متناقصة تماما على \mathbb{R}

• لدينا

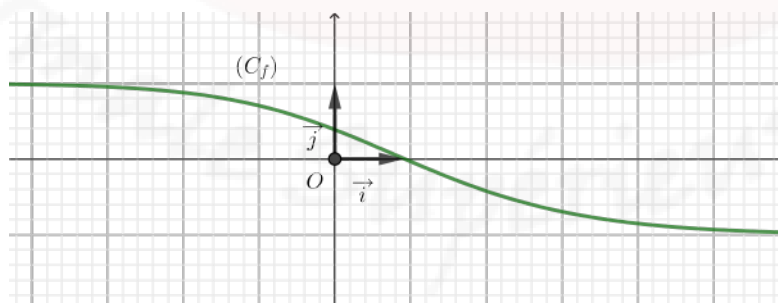
$$f(1) \approx -0,03$$

$$f(0,9) \approx 0,01$$

• $f(0,9) \times f(1) < 0$ ومنه

وبالتالي المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,9 < \alpha < 1$

ب. إنشاء المنحنى (C_f)



3. أ. تبين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f(x) + f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا

$$\begin{aligned} f(x) + f'(x) &= \frac{2 \ln(e^x + 1)}{e^x} - 1 + 2e^{-x} \times g(e^x) \\ &= 2e^{-x} \ln(e^x + 1) - 1 + 2e^{-x} \left[\frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(e^x + 1) \right] \\ &= 2e^{-x} \ln(e^x + 1) - 1 + \frac{2}{e^x + 1} - 2e^{-x} \ln(e^x + 1) \\ &= -1 + \frac{2 + 2e^x - 2e^x}{e^x + 1} \\ &= -1 + 2 - \frac{2e^x}{e^x + 1} \\ &= 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1} \end{aligned}$$

ب. استنتاج دالة أصلية F للدالة f على \mathbb{R}

الدالة f مستمرة على \mathbb{R} ، وبالتالي هي تقبل دالة أصلية F على \mathbb{R} حيث

$$\begin{aligned} F(x) &= -f(x) + x - 2 \ln(e^x + 1) \\ &= -2e^{-x} \ln(e^x + 1) + 1 + x - 2 \ln(e^x + 1) \\ &= x + 1 - 2(e^{-x} + 1) \ln(e^x + 1) \end{aligned}$$

(III) 1. أ. حساب β_1 ثم تفسير النتيجة هندسيا.

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \int_0^1 [2e^{-x} \ln(1 + e^x) - 1 + 1] dx \\ &= \int_0^1 [f(x) + 1] dx \\ &= [F(x) + x]_0^1 \\ &= F(1) - F(0) + 1 \\ &= 1 + 1 - 2(e^{-1} + 1) \ln(e + 1) - 0 - 1 + 2(e^0 + 1) \ln(e^0 + 1) + 1 \\ &= 4 \ln 2 - 2(e^{-1} + 1) \ln(e + 1) + 2 \end{aligned}$$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x) > -1$ ، وعليه النتيجة تُفسر هندسيا بأن β_1 هو قيمة مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات : $y = -1$ ، $x = 0$ و $x = 1$

ب. تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\beta_n \leq 2 \ln(1 + e)$

من أجل كل $x \in [0; 1]$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا

$$e^{-\frac{x}{n}} \ln(1 + e^x) \leq 1 \times \ln(1 + e)$$

ومنه

$$\int_0^1 e^{-\frac{x}{n}} \ln(1 + e^x) dx \leq \ln(1 + e)$$

وعليه

$$\beta_n \leq 2 \ln(1 + e)$$

ج. تبين أن المتتالية (β_n) متزايدة تماما على \mathbb{N}^* ثم استنتاج أنها متقاربة نحو عدد حقيقي l من أجل كل n من \mathbb{N}^* لدينا

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

ومن أجل كل x من $[0; 1]$ نجد

$$e^{-\frac{x}{n}} < e^{-\frac{x}{n+1}}$$

ومنه

$$e^{-\frac{x}{n}} \ln(e^x + 1) < e^{-\frac{x}{n+1}} \ln(e^x + 1)$$

وعليه

$$0 < e^{-\frac{x}{n}} \ln(e^x + 1) < e^{-\frac{x}{n+1}} \ln(e^x + 1)$$

وبالتالي

$$\int_0^1 e^{-\frac{x}{n}} \ln(e^x + 1) dx < \int_0^1 e^{-\frac{x}{n+1}} \ln(e^x + 1) dx$$

أي $\beta_n < \beta_{n+1}$ ، عندئذ نستنتج أن المتتالية (β_n) متزايدة تماما على \mathbb{N}^* وبما أنها محدودة من الأعلى بالعدد $2 \ln(e+1)$ فهي متقاربة نحو عدد حقيقي l

2. أ. تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $(1 - e^{-\frac{1}{n}}) \ln 4^n \leq \beta_n \leq (1 - e^{-\frac{1}{n}}) \ln(1+e)^{2n}$

من أجل كل x من $[0; 1]$ لدينا

$$\ln 2 \leq \ln(e^x + 1) \leq \ln(e+1)$$

ومن أجل كل n من \mathbb{N}^* نجد

$$e^{-\frac{x}{n}} \ln 2 \leq e^{-\frac{x}{n}} \ln(e^x + 1) \leq e^{-\frac{x}{n}} \ln(e+1)$$

ومنه

$$\ln 2 \int_0^1 e^{-\frac{x}{n}} dx \leq \int_0^1 e^{-\frac{x}{n}} \ln(e^x + 1) dx \leq \ln(e+1) \int_0^1 e^{-\frac{x}{n}} dx$$

وعليه

$$2n \left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right) \ln 2 \leq \beta_n \leq 2n \left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right) \ln(1+e)$$

أي

$$\left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right) \ln 4^n \leq \beta_n \leq \left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right) \ln(1+e)^{2n}$$

ب. استنتاج حصر للعدد l . من أجل كل n من \mathbb{N}^* لدينا

$$n \left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right) \ln 4 \leq \beta_n \leq n \left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right) \ln(1+e)^2$$

ولدينا

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[n \left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right) \right] &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - e^{-\frac{1}{n}}}{-\frac{1}{n}} \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow 0} \left(\frac{e^m - 1}{m} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

وبما أن (β_n) متقاربة نحو l فإن $\ln 4 \leq l \leq \ln(e+1)^2$

سلم تنقيط الموضوع الثاني

التمرين الأول (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
أ.1 (I)	$0,25 + 0,5$
ب.1 (I)	$0,25 + 0,5$
أ.2 (I)	$0,25 + 0,25$
ب.2 (I)	$0,25 + 0,25$
أ.1 (II)	$0,25$
أ.ب (II)	$0,25 + 0,25 + 0,25$
2 (II)	$0,25 + 0,25$

التمرين الثاني (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
(II)	$0,25 + 0,5 + 0,25$
أ.1 (II)	$0,25 + 0,5$
ب.1 (II)	$0,25 + 0,5$
2 (II)	$0,5 + 0,5$
3 (II)	$0,25 + 0,25$

التمرين الثالث (5 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
أ.1	$0,25 + 0,75$
ب.1	$0,25 + 0,5$
ج.1	$0,25 + 0,25$
أ.2	$0,5 + 0,5$
ب.2	$0,5$
أ.3	$0,75$
ب.3	$0,5$

التمرين الرابع (7 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1 (I)	$0,25 + 0,25$
2 (I)	$0,5 + 0,25$
أ.1 (II)	$0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25$
ب.1 (II)	$0,5$
ج.1 (II)	$0,25 + 0,25$
أ.2 (II)	$0,25$
ب.2 (II)	$0,5$
أ.3 (II)	$0,25$
ب.3 (II)	$0,25 + 0,25$
أ.1 (III)	$0,25 + 0,25$
ب.1 (III)	$0,25$
ج.1 (III)	$0,25 + 0,25$
أ.2 (III)	$0,25 + 0,25$
ب.2 (III)	$0,25$

■ انتهى