الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة بورقلة
مصلحة النشاطات الثقافية والرياضية
دورة أفريل 2024
الشعبة: علوم تجريبية
المادة: الرياضيات
المدّة: 3 ساعات و 30 د

امتحان البكالوريا التجريبي

على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل (4 ن)

المتتالية العددية (U_n) معرّفة بـ : $U_0 = 2$ ، ومن أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n - n) - 1$

1. أُحسب كُلّا من U_1 و U_2
2. أ. برهن بالتّراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_n + n > 0$
ب. بيّن أنّ المتتالية (U_n) متناقصة تماما
3. المتتالية العددية (V_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $V_n = U_n + n$
أ. بيّن أنّ المتتالية (V_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.
ب. أُكتب عبارة V_n بدلالة n ثمّ استنتج U_n بدلالة n
ج. أُحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$
4. من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع : $S_n = \ln U_0 + \ln(U_1 + 1) + \ln(U_2 + 2) + \cdots + \ln(U_n + n)$
- بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $S_n = (n+1)(2-n)\ln\sqrt{2}$

التمرين الثاني (4 ن)

يحتوي كيس U_1 على : ثلاث كريّات تحمل الرقم 1 و أربع كريّات تحمل الرقم 2، ويحتوي كيس U_2 على : ست كريّات بيضاء وأربع كريّات حمراء، كلّ الكريّات متماثلة ولا نفرّق بينها عند اللّمس.

1. نسحب عشوائيا من U_2 كريّتين على التوالي وبإرجاع، أُحسب احتمال كُلّا من الحدثين الآتيين
- الحدث A: " الحصول على كريّتين من نفس اللّون ".
- الحدث B: " الحصول على كريّة حمراء على الأكثر".
2. نسحب عشوائيا كريّة من U_1 ، إذا كانت تحمل الرقم 1 نسحب عشوائيا من U_2 كريّتين على التوالي بدون إرجاع، وإذا كانت تحمل الرقم 2 نسحب عشوائيا من U_2 ثلاث كريّات في آن واحد.
نعتبر X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ عمليّة سحب من U_2 عدد الكريّات البيضاء المسحوبة.
أ. عيّن قيم المتغيّر العشوائي X
ب. بيّن أنّ : $P(X=1) = \frac{2}{5}$ و $P(X=2) = \frac{3}{7}$

ج. عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X ثمّ أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$

التمرين الثالث (5 ن)

I) حلّ في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z-2i)(z^2+2z+4)=0$

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لاحقاتها z_A ، z_B ، z_C و z_D على الترتيب حيث : $z_A=-1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=2i$ و $z_D=2$

1. أ. أُكتب كُلّا من z_A ، z_B و z_C على الشّكل الأسّي

ب. استنتج أنّ النقط A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

2. أ. أُكتب العدد المركّب $\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}$ على الشّكل الجبري ثمّ على الشّكل الأسّي.

ب. استنتج طبيعة المثلّث ABD

3. لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z

أ. عيّن (Γ_1) مجموعة النقط M حيث : $z=2i+e^{i\theta}$ و θ يمسح $\mathbb{R}$

ب. عيّن (Γ_2) مجموعة النقط M حيث : $|\overline{z}+2i|=\left|iz+\sqrt{3}+i\right|$

التمرين الرّابع (7 ن)

I) الدّالة العددية g معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x^3-1+2\ln x$

1. أُدرس اتجاه تغيّر الدّالة g على $]0;+\infty[$

2. أُحسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x^2}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. أ. أُحسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ وفسّر النتيجة هندسيا ثمّ أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f

2. أ. بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب. أُدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

3. أنشئ كُلّا من (Δ) و (C_f)

4. أ. باستعمال المكاملة بالتجزئة أُحسب $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$

ب. أُحسب S مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات : $y=x-1$ ، $x=1$ و $x=e$

5. الدّالة العددية h معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=f(e^x)$

- أُدرس اتجاه تغيّر الدّالة h على $\mathbb{R}$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها (لا يُطلب حساب $h(x)$).

انتهى الموضوع الأوّل

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل (4 ن)

مسابقة يختار فيها تلميذ عشوائيا 3 أسئلة في آن واحد من علبة غير شفّافة تحتوي على 6 أسئلة علمية، 5 أسئلة أدبية و 4 أسئلة في الثقافة العامّة حيث في كلّ نوع من الأنواع الثلاثة يوجد سؤال واحد باللغة الأجنبية.

1. أُحسب احتمال كلّا من الحدثين الآتيين

أ. A: " الأسئلة الثلاثة متمايزة النوع مثنى مثنى ".

ب. B: " سؤال واحد على الأكثر باللغة الأجنبية ".

2. أ. بيّن أنّ $P(A\cap B)=\dfrac{107}{455}$

ب. استنتج احتمال أن تكون كلّ الأسئلة متمايزة النّوع مثنى مثنى علما أنّه من بينها سؤال واحد على الأكثر باللغة الأجنبية.

3. عند الإجابة على سؤال علمي يكسب التلميذ نقطتين، ويكسب نقطة عند الإجابة على سؤال أدبي أو سؤال في الثقافة العامّة، نفترض أنّ التلميذ يُجيب على كلّ الأسئلة ونعتبر X المتغيّر العشوائي الذي يُرفق بكل سحب مجموع النقط المحصّل عليها.

أ. برّر أنّ مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي $\{3;4;5;6\}$

ب. عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X ثمّ أُحسب أمله الرياضياتي $E(X)$

ج. استنتج قيمة $E(1962X+2024)$

التمرين الثاني (4 ن)

عيّن الاقتراح الصّحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كلّ حالة من الحالات الآتية مع التّبرير.

1. حلّ المعادلة $(1-2i)\,\overline{z}+2+i=0$ ذات المجهول z في $\mathbb{C}$ هو :

أ) i　　　ب) $-i$　　　ج) $2-i$

2. عمدة للعدد المركّب z حيث $z=-2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ هي :

أ) $\dfrac{\pi}{3}$　　　ب) $-\dfrac{\pi}{3}$　　　ج) $\dfrac{4\pi}{3}$

3. إذا كان العدد المركّب z تخيّليا صرفا فإنّ z^{2024} عدد :

أ) تخيّلي صرف　　　ب) حقيقي موجب　　　ج) حقيقي سالب

4. إذا كانت α عمدة للعدد المركّب z وطويلة z تساوي 1 فإنّ العدد المركّب $\dfrac{i}{z}$ يُكتب على الشّكل الأسّي :

أ) $e^{2\alpha}$　　　ب) $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$　　　ج) $e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}$

التمرين الثالث (5 ن)

الدّالة العددية f معرّفة على المجال $[1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x+1}$

ونعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_0=1$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n بـ : $U_{n+1}=f(U_n)$

1. بيّن أنّ الدّالة f متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

2. أ. برهن بالتّراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $1 \leq U_n < 2$

ب. بيّن أنّ المتتالية (U_n) متزايدة

ج. استنتج أنّ (U_n) متقاربة ثمّ عيّن نهايتها l

3. أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $0 < 2 - U_{n+1} \leq \frac{3}{4}(2 - U_n)$

ب. استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $0 < 2 - U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

ج. أُحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

4. من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $S_n \geq 2n - 2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$

ب. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

التمرين الرّابع (7 ن)

I) الدّالة العددية g معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 - x + e^{x-1}$

1. أُدرس اتجاه تغيّر الدّالة g على $\mathbb{R}$

2. أُحسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x - 1 + \frac{x}{e^{x-1}}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$

1. أ. أُحسب كُلّا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{x-1}}$

ج. استنتج أنّ الدّالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2. بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $0,3 < \alpha < 0,4$

3. أ. بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ب. أُدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

4. أ. بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يُطلب كتابة معادلة له.

ب. أُحسب $f(-2)$ ثمّ أنشئ كُلّا من (Δ) ، (T) و (C_f)

ج. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = x - |m|$

5. نرمز بـ $\mathcal{A}(\alpha)$ إلى مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات: $y = x - 1$ ، $x = \alpha$ و $x = 1$

أ. باستعمال المكاملة بالتجزئة أُحسب $\int_{\alpha}^{1} xe^{1-x}dx$

ب. بيّن أنّ $\mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \alpha - 2$ ثمّ استنتج حصراً للعدد $\mathcal{A}(\alpha)$

انتهى الموضوع الثاني