الشعبة : علوم تجريبية

اختبار في مادة الرياضيات

المدة : 3 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية : $\left(\bar{z}+1-\sqrt{3}\right)\left(z^2+2z+4\right)=0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها : $z_A=-1+\sqrt{3}$ ، $z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=\bar{z}_B$.

❶ بين أن $z_B-z_A=i\left(z_C-z_A\right)$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

❷ أ) أُكتب على الشكل الجبري العدد المركب L حيث : $L=\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_C}\right)$.

ب) أُكتب على الشكل الأسي العدد z_C-z_A

ثم بين أن : $L=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ ، ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ $\tan\dfrac{\pi}{12}$.

❸ عين (Δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\dfrac{z_A-z}{z_B-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما .

التمرين الثاني : (04 نقاط)

✍ كيس غير شفاف به 9 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس ، منها 4 كريات سوداء تحمل الرقم λ

و 3 كريات صفراء تحمل الرقم $(\lambda-1)$ ، وكريتين بيضاوين تحملان الرقم 1 . (حيث λ عدد طبيعي غير معدوم)

I) نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من هذا الكيس ، ونعتبر الحوادث التالية :

A : " سحب كرية بيضاء على الأكثر " .

B : " سحب ثلاث كريات تحمل نفس الرقم " .

C : " سحب كريتين بالضبط تحمل الرقم $(\lambda-1)$ " .

❶ أُحسب $P(A)$ ، $P(B)$ ثم بين أن $P(C)=\dfrac{9}{42}$

II) نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الأرقام المسجلة على الكريات السوداء المسحوبة

والذي يأخذ القيمة 0 إذا كانت كل الكريات ليست سوداء .

❶ عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X .

❷ عرف قانون إحتمال المتغير العشوائي X .

❸ أُحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X بدلالة λ، ثم حدد قيم λ من أجل $|E(X)-1|\leq 2$.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

I) نعتبر (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = \alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$

❶ عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة .

❷ نفرض فيما يلي : $\alpha = \frac{3}{2}$

أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 2$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة ، و استنتج أنها متقاربة .

II) لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : بـ : $v_n = \ln(u_n - 1)$

❶ برهن أن المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

❷ أُكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n ثم أُحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

❸ نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = \frac{v_0}{2^0} + \frac{v_1}{2^1} + \ldots + \frac{v_n}{2^n}$. بين أن : $S_n = (-n-1)\ln 2$

❹ نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S'_n = v_0^2 + v_1^2 + \ldots + v_n^2$. أُحسب S'_n بدلالة n .

التمرين الرابع : (08 نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ ، بـِ : $g(x) = (x+1)e^x - e$.

❶ أُدرس تغيّرات الدالة g.

❷ برهن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,5 < \alpha < 0,6$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) لتكن الدالّة العدديّة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = xe^x - ex + e - 2$
(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد (الوحدة : $\|\vec{i}\| = 4cm$ ؛ $\|\vec{j}\| = 2cm$)

❶ أُحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

❷ أ) بيّن أنه من أجل كلّ عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$.

ب) استنتج اتجاه تغيّرالدالة f، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

❸ أ)أثبت أنّ المستقيم (D) ذا المعادلة $y = -ex + e - 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) ادرس وضعيّة المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D).

ج) بيّن أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (D)، يطلب كتابة معادلة له.

❹ أ) أنشئ المماس (T) ، ثم المنحنى (C_f) (تعطى $f(\alpha) \simeq 0.2$ ، و $f(1,5) \simeq 3,36$).

ب) ناقش بيانيّا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m + 2 - e)e^{-x} = x$.

❺ أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب $\int_{\lambda}^{0} xe^x dx$ ؛ حيث $\lambda < 0$.

ب) احسب بالسنتيمتر المربّع $A(\lambda)$: مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f)، و المستقيم (D) و المستقيمينْ اللذينْ معادلتيهما $x = 0$ ، و $x = \lambda$ ؛ حيث $\lambda < 0$ ، ثمّ تحقق أنّ $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda) = 8$

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

✍ لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة ، عينه مع التعليل .

❶ z عدد مركب شكله الجبري $z = x + iy$. مجموعة حلول المعادلة : $z^2 - z.\bar{z} + 2 = 0$ في $\mathbb{C}$ هي :

أ) $S = \{-1;1\}$ ب) $S = \{-1+i;1+i\}$ ج) $S = \{-i;i\}$

❷ ليكن المجموع S حيث : $S = 1 + i^2 + i^4 + i^6 + \ldots + i^{2024}$ ، (i هو العدد المركب الذي طويلته 1 و عمدة له $\frac{\pi}{2}$)

أ) $S = 0$ ب) $S = 1$ ج) $S = 2024$

❸ نعتبر العدد المركب A حيث : $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2024} + i\,(i)^{1445}$

أ) A حقيقي سالب ب) A حقيقي موجب ج) A تخيلي

❹ في المستوى المركب $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقطة B ذات اللاحقة : $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

المجموعة (γ) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق : $|2z + 1 - i| = |1 + i|$ هي :

أ) دائرة مركزها B و نصف قطرها $\sqrt{2}$ ب) دائرة مركزها B و نصف قطرها $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ج) مجموعة خالية

التمرين الثاني : (04 نقاط)

I) لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$

❶ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n \leqslant 2$.

❷ حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، و استنتج أنها متقاربة ، ثم أُحسب نهايتها .

II) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : بـ : $v_n = 3 + \frac{1}{u_n - 1}$

❶ بين أن المتتالية (v_n) حسابية ، يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

❷ أُكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{n+2}{n+1}$

❸ أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $S_n = \frac{u_1}{3} + \frac{u_2}{8} + \frac{u_3}{15} + \ldots + \frac{u_n}{n(n+2)}$

بين أن : $S_n = \frac{n}{n+1}$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

✍ كيس غير شفاف به 9 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس ، منها 3 كريات حمراء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 2 و 3 كريات خضراء تحمل الأرقام 2 ، 2 ، 3 وكريتين بيضاوين تحملان الرقين 1 و 3 وكرية سوداء تحمل الرقم 3 .

I) نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من هذا الكيس ، ونعتبر الحوادث التالية :

A : " سحب ثلاث كريات من نفس اللون " .

B : " سحب ثلاث كريات تحمل ألوان العلم الوطني " .

C : " سحب ثلاث كريات تحمل أرقام شعارنا المألوف three ، two ، one " .

❶ أُحسب $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(C)$ ثم بين أن $P_C(B) = \frac{3}{18}$

II) نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب ، عدد الألوان الممكن إيجادها في العلم الفلسطيني .

❶ برر أن قيم المتغير العشوائي X هي $\{1,2,3\}$

❷ عرف قانون إحتمال المتغير العشوائي X .

❸ أُحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

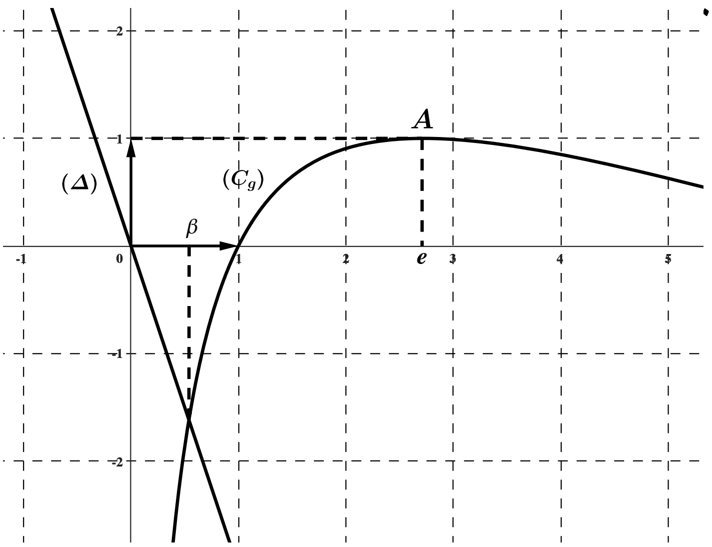
(للتذكير : علم دولة فلسطين يتكون من اللون الأبيض و الأحمر و الأخضر و الأسود)

التمرين الرابع : (08 نقاط)

I) لتكن g دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = a(\ln x)^2 + b\ln x$ حيث a و b عددين حقيقيين ثابتين .

(C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. و (Δ) مستقيم معادلته : $y = -3x$

β فاصلة نقطة تقاطع (Δ) و (C_g) كما هو موضح في الشكل .



$A(e;1)$ نقطة حدية (ذروة) لـ (C_g) .

❶ أ) عين $g'(x)$ بدلالة a و b .

ب) مما سبق بين أن : $a = -1$ و $b = 2$.

❷ بقراءة بيانية حدد وضعية (C_g) بالنسبة إلى (Δ) ،

ثم استنتج إشارة $h(x)$ حيث : $h(x) = g(x) + 3x$

على المجال $]0;+\infty[$

II) f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = 3\ln x + \frac{(\ln x)^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

❶ بين أن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = +\infty$ و فسر النتيجة هندسيا ، ثم أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

❷ أ) بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$. (f' الدالة المشتقة للدالة f)

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

❸ أ) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 1 و الآخر α حيث : $0,3 < \alpha < 0,4 < \beta$

ب) تأكد أن : $\ln(\alpha) = -3\alpha$.

❹ أنشئ (C_f) على المجال $]0;5]$ (نأخذ $\beta = 0.5$ و $f(\beta) = -1,2$ و $f(5) = 5,3$)

❺ أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين دالة أصلية للدالة $x \to \ln x$ و التي تنعدم من أجل $x = e$.

ب) بين أن مساحة حيز المستوي A_α المحدد بـ (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y = 0$ ، $x = \alpha$ و $x = 1$.

هي : $A_\alpha = (-9\alpha^3 - 9\alpha^2 - 3\alpha + 3)u.a$