الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية | ثانوية الأرقم المخزومي

امتحان ابيض لبكالوريا التعليم الثانوي | دورة : 2024

الشعبة : رياضيات

اختبار في مادة : الرياضيات | المدة : 4 ساعات و 30 د

على التلميذ ان يختار احد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الاول

التمرين الأول : 4.5 نقطة

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ الجملة S :

$$S:\begin{cases} a+b+c=3+i \\ ia+b-c=\sqrt{3}(1+i) \\ a-b+c=1+3i \end{cases}$$

حيث a,b,c أعداد مركبة غير معدومة .

2- اكتب كل من a و b على الشكل المثلثي ثم الاسي .

3- برهن أن : $\frac{a\times b}{2\sqrt{2}}=e^{\frac{\pi}{12}i}$ ثم استنتج قيمة $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ثم اثبت ان : $c=(\sqrt{6}-\sqrt{2})e^{\frac{\pi}{12}i}$.

من اجل كل عدد طبيعي n نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث :

$$\begin{cases} u_{n+1}=u_n-(2-\sqrt{3})v_n \\ v_{n+1}=(2-\sqrt{3})u_n+v_n \end{cases} \quad : \quad u_0=1 \quad ، \quad v_0=0$$

1- من اجل كل عدد طبيعي n برهن بالتراجع ان : $u_n+iv_n=c^n$.

2- من اجل كل عدد طبيعي n استنتج أن : $u_n=\frac{\cos\frac{n\pi}{12}}{(\cos\frac{\pi}{12})^n}$ و $v_n=\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{(\sin\frac{\pi}{12})^n}$.

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

من اجل كل عدد طبيعي n نرمز بـ A_n للنقطة ذات اللاحقة c^n

1- عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها تكون النقط O, A_0, A_n في استقامة واحدة .

2- من اجل كل عدد طبيعي n برهن أن المثلث OA_nA_{n+1} قائم في النقطة A_n.

منـــصــــة القـلـــم الـجــزائـــري | DZPEN.COM

التمرين الثاني : 5 نقاط

المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{2x+4}{x-1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني

1- ادرس اتجاه تغير الدالة f وأنشئ جدول تغيراتها .

2- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) ذي المعادلة : $y=x$.

من اجل كل عدد طبيعي n نعتبر العدد الحقيقي u_n حيث $u_n\neq 1$

ولتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بحدها الأول العدد الحقيقي u_0 و بالعلاقة التراجعية : $u_{n+1}=f(u_n)$

1- ناقش حسب قيم العدد الحقيقي u_n اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و تقاربها .

g دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-5\}$ بالعلاقة $g(x)=(f\circ f)(x)$ ومن اجل كل عدد طبيعي n

نعرف المتتاليتين $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كما يلي : $\begin{cases} A_{n+1}=g(A_n) & A_0=2 \\ B_{n+1}=g(B_n) & B_0=8 \end{cases}$

1- من اجل كل عدد طبيعي n برهن ان : $A_0\leq A_n<4$ و $4<B_n\leq B_0$.

2- ادرس اتجاه تغير كل من $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$. هل هما متقاربتان ؟ علل .

من اجل كل عدد طبيعي n نعتبر المتتالية $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $d_n=A_n-B_n$.

3- من اجل كل عدد طبيعي n برهن ان : $d_n\leq 4\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$. ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n$.

4- برهن ان المتتاليتين $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متجاورتين ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n$.

5- من اجل كل عدد طبيعي n برهن بالتراجع أن : $u_{2n}=A_n$ و $u_{2n+1}=B_n$.

6- استنتج كل من $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$ ثم برهن ان $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ يطلب حسابه .

التمرين الثالث : 6.5 نقطة

g دالة معرفة على $D_g=\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x)=\sqrt{1+e^{2x}}-1$

1- احسب ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

2- احسب $g'(x)$ ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g و انشئ جدول تغيراتها . واستنتج على $\mathbb{R}$ اشارة الدالة g .

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=(\ln\circ g)(x)=\ln(\sqrt{1+e^{2x}}-1)$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني

1- احسب كل من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- احسب $f'(x)$ ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f و انشئ جدول تغيراتها .

3- عين احداثيي نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل و حامل محور التراتيب .

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

4- احسب $\lim_{x\to+\infty} d_1(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)-x$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

5- احسب $\lim_{x\to-\infty} d_2(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)-2x$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

6- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى كل من المستقيمين $(D_1);\ y=x$ و $(D_2);\ y=2x-\ln 2$.

7- أنشئ كل من (D_1) و (D_2) و المنحنى (C_f) .

(Γ) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto e^x$ في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

من اجل $n\in\mathbb{N}^*$ و من اجل كل $k\in\{0;1;2;...,n\}$

نرمز بـ M_k للنقطة من المنحنى (Γ) حيث : $M_k(\frac{k}{n};\frac{k+1}{n})$

من اجل كل $k\in\{0;1;2;...;(n-1)\}$

1- اثبت انه يوجد $c_k\in\left]\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right[$ بحيث : $e^{\frac{k+1}{n}}-e^{\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}e^{c_k}$

من اجل كل $k\in\{0;1;2;...;(n-1)\}$

2- برهن ان : $M_kM_{k+1}=\frac{1}{n}\sqrt{1+e^{2c_k}}$ حيث M_kM_{k+1} هي المسافة بين النقطتين M_k و M_{k+1} .

من اجل كل $k\in\{0;1;2;...;(n-1)\}$

3- استنتج أن : $\frac{1}{n}\sqrt{1+e^{2\frac{k}{n}}}\le M_kM_{k+1}\le\frac{1}{n}\sqrt{1+e^{2\frac{1+k}{n}}}$

لتكن $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بحدها العام : $S_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}M_kM_{k+1}$.

1- تحقق من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أن : $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\sqrt{1+e^{2\frac{k}{n}}}\le S_n\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\sqrt{1+e^{2\frac{k}{n}}}$

2- استنتج النهاية $\lim_{n\to+\infty} S_n=\int_0^1 e^{f(x)}+1\,dx$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

التمرين الرابع : 4 نقاط

نشير في هذا التمرين انه اذا كان p عددا اوليا فرديا و $a\in\mathbb{Z}$ فان : $a^p\equiv a[p]$

اكثر من ذلك اذا كان $p\wedge a=1$ فان $a^{p-1}\equiv 1[p]\ ...(*)$

مثال : $3\wedge 5=1$ ومنه $3^{5-1}\equiv 1[5]$ اي $81\equiv 1[5]$

DZPEN.COM | منـــصـــة القـلـم الجـزائـــري

في مجموعة الاعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ نعتبر المعادلة (E) ... $x^2 \equiv 2\left[p\right]$ بحيث p عدد اولي فردي

1- برهن ان $2^{p-1} \equiv 1\left[p\right]$.

2- استنتج انه اما ($2^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1\left[p\right]$) او ($2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1\left[p\right]$)

ليكن x حل المعادلة (E)

1- برهن ان x و p اوليان فيما بينهما .

2- استنتج عندئذ ان : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1\left[p\right]$.

نشير هنا الى انه من اجل كل $k \in \{1;2;...;(p-1)\}$ ان :

$$C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!} \quad \text{و} \quad kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$$

1* - برهن ان p يقسم العدد الطبيعي C_p^k .

2- باستخدام دستور موافر احسب $(1+i)^p$ حيث : $i^2 = -1$.

يقبول ان : $(1+i)^p = \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} + i \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k+1}$

3- برهن ان : $2^{\frac{p}{2}} \cos(p\frac{\pi}{4}) \in \mathbb{Z}$ و $2^{\frac{p}{2}} \cos(p\frac{\pi}{4}) \equiv 1\left[p\right]$

(يمكن استعمال السؤال 1*)

4- استنتج انه اذا كان $p \equiv 5\left[8\right]$ فان (E) ليس لها حلولا في $\mathbb{Z}$.

منـصـــة الـقـلـم الـجـزائـــري | DZPEN.COM

الموضوع الثاني

التمرين الاول : 4 نقاط

كيس به 10 كرات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس منها 4 بيضاء و 6 حمراء .

نسحب عشوائيا من الكيس 3 كرات في آن واحد .

1- احسب احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء .

2- احسب احتمال الحصول على الاقل على كرية حمراء .

ليكن المتغير العشوائي X و الذي يرفق بكل عملية سحب **عدد الكرات** البيضاء المسحوبة .

3- عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X واحسب امله الرياضياتي $E(X)$

و تباينه $V(X)$ واستنتج انحرافه المعياري $\sigma(X)$.

نسحب من الكيس في آن واحد 3 كرات خمس مرات على التوالي مع الاعادة (الارجاع)

احسب احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء **مرتين** بالضبط .

التمرين الثاني : 5 نقاط

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ الجملة : $\begin{cases} \sqrt{2}z_1 - z_2 = -\left[1+\left(1+\sqrt{2}\right)i\right] \\ z_1 + iz_2 = \sqrt{2}i \end{cases}$

في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ نعتبر النقط :

$A\left(z_A = 1-i\right)$, $B\left(z_B = 1+\sqrt{2}+i\right)$, $C\left(z_C = 1+\left(1+\sqrt{2}\right)i\right)$

2- اكتب العدد المركب z_A على الشكل المثلثي ثم على الشكل الاسي . ثم احسب z_A^{2024} .

ليكن العدد المركب $\overline{z_B}$ مرافق العدد z_B .

3 -1- بين ان : $z_A \times z_B = \sqrt{2}\ \overline{z_B}$.

3 -2- استنتج عندئذ ان : $\arg\left(z_A\right) + 2\arg\left(z_B\right) \equiv 0\left[2\pi\right]$.

3 -3 - اوجد عمدة العدد المركب z_B ثم اكتبه على الشكل المثلي ثم الاسي و احسب z_B^{2024} .

4 -1- اثبت ان النقطة B صورة النقطة A بواسطة انسحاب T يطلب تحديد شعاعه $\vec{\omega}$.

4 -2- برهن انه يوجد تحويل نقطي S مركزه O و يحول B الى C يطلب تحديد عبارته وعناصره المميزة .

4 -3- استنتج طبيعة المثلث OBC.

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

لتكن الدائرة (Γ) التي مركزها $\Omega(x,y)$ و نصف قطرها r و المحيطة بالمثلث OBC .

5- 1 - برهن ان : $\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ x^2+y^2+4+2\sqrt{2}-2\left(\left(1+\sqrt{2}\right)x+y\right)=r^2 \\ x^2+y^2+4+2\sqrt{2}-2\left(\left(1+\sqrt{2}\right)y+x\right)=r^2 \end{cases}$

5- 2- استنتج عندئذ z_Ω لاحقة مركز الدائرة (Γ) و اكتب معادلتها و أنشئها في المعلم السابق .

5- 3- حدد من المستوي مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق : $\arg\left[\overline{(iz_C+\sqrt{2})z}\right]\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

التمرين الثالث : 6 نقاط

لتكن الدالة العددية h المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بالعبارة : $h(x)=\dfrac{x^2+1}{3x^2-1}$

وليكن (Γ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- ادرس تغيرات الدالة h و ارسم (Γ) تمثيلها البياني .

2- ادرس تغيرات الدالة $x\mapsto \ln x$ وارسم تمثيلها البياني .

لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بالعبارة : $g(x)=\ln(x)-h(x)$

1- ادرس تغيرات الدالة g و انشئ جدول تغيراتها .

2- اثبت انه يوجد عددين حقيقين x_1,x_2 بحيث : $\begin{cases} 0\prec x_1\prec 1\prec x_2\prec 2 \\ g(x_1)=g(x_2)=0 \end{cases}$

3- ادرس تبعا لقيم العدد الحقيقي x اشارة الدالة g .

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{x\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}$

4- اكتب عبارة f' الدالة المشتقة الاولى للدالة f . ثم برهن ان : $f'(x)=\dfrac{\left(1-3x^2\right)g(x)}{\left(x^2+1\right)^3}$.

5- احسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{h(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

6- استنتج عندئذ تغيرات الدالة f .

7- ارسم المنحنى (C) الممثل للدالة f في نفس المعلم السابق .

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

لتكن الدالة العددية k المعرفة من اجل كل عدد حقيقي x بالعبارة : $k(x)=\dfrac{1}{x(x^2+1)}$.

1- تحقق من ان : $\dfrac{1}{x(x^2+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}$

2- استنتج دالة اصلية للدالة k على المجال $]0,+\infty[$.

من اجل كل عدد حقيقي α من المجال $]0,1[$ نضع : $I(\alpha)=\int_{\alpha}^{1}\dfrac{x\ln x}{(x^2+1)^2}dx \quad : \alpha\in]0,1[$

3- باستعمال **المكاملة بالتجزئة** احسب $I(\alpha)$. ثم احسب $\lim\limits_{\alpha \xrightarrow{>} 0} I(\alpha)$ وفسر النتيجة هندسيا .

التمرين الرابع : 5 نقاط

ليكن العدد الحقيقي a من $\mathbb{R}_+^*$ ولنضع $b=\sqrt[3]{a}$

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة $f(x)=\dfrac{1}{3}\left(2x+\dfrac{a}{x^2}\right)$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- ادرس تغيرات الدالة f و انشئ جدول تغيراتها .

2- حل في المعادلة $f(x)=x$ ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى المستقيم (D) ذي المعادلة $y=x$.

3- استنتج انه اذا كان $x>b$ فان $f(x)<x$.

4- برهن ان كثير الحدود $p(X)=2X^3-3bX^2+a$ يقبل العدد b كجذر حقيقي له .

5- عين حاصل القسمة الاقليدية لكثير الحدود $p(X)$ على العبارة الجبرية $(X-b)^2$.

لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}_+^*-\{b\}$ بالعبارة : $h(x)=\dfrac{b(f(x)-b)}{(x-b)^2}$

1- باستعمال السؤال 5 بسط عبارة الدالة h .

2- ادرس استمرارية الدالة h عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=b$ ثم احسب $h(b)$.

3- برهن انه اذا كان $x>b$ فان $h(x)<1$.

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

من اجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2u_n + \frac{a}{u_n^2}\right) \end{cases}$

1- عين u_0 الحد الذي نبدا به حتى تكون $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية ثابتة هل هي متقاربة عندئذ ؟ علل .

2- برهن صحة الخاصيتين $p(n)$ و $q(n)$ الآتيتين : $\begin{cases} p(n);\ \ n \geq 1 : u_n \geq b \\ q(n);\ \ n \geq 1 : u_{n+1} \leq u_n \end{cases}$

لتكن المتتالية $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بالعبارة : $d_n = \frac{u_n - b}{b}$

1- من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم برهن ان : $0 \leq d_{n+1} \leq d_n^2$.

2- من اجل كل عدد طبيعي n استنتج ان : $d_{n+1} \leq (d_1)^{2^n}$

نضع $a = 3$ و $u_0 = \frac{3}{2}$

1- برهن ان $b > \frac{7}{5}$ ثم برهن ان $d_1 < \frac{2}{63}$.

2- من اجل كل عدد طبيعي n استنتج ان : $0 \leq u_{n+1} - b \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{63}\right)^{2^n}$.

3- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4- عين قيمة تقديرية للعدد الطبيعي m الذي يحقق : $0 \leq u_5 - \sqrt[3]{3} \leq 10^{-m}$. ماذا تستنتج ؟

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري