الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية ميلة — ثانوية صالح بوجنانة – بوحاتم –

امتحان البكالوريا التجريبي — دورة: ماي 2024 .

الشعبة : علوم تجريبية

اختبار في مادة : الرياضيات — المدّة :03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

يحتوي صندوق على **خمس** كريات بيضاء تحمل الأرقام 3 ; 2 ; 1; 0; 1− و **ثلاث** كريات حمراء تحمل الأرقام 3 ;4− و 0 . و**كريتين** خضراء تحملان الرقمين 4 ; 0 . الكريات كلها متماثلة ولانفرق بينها عند اللمس .نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الصندوق .

1) أحسب احتمال كل حدث من الأحداث التالية :

A : " الحصول على ثلاث كريات مختلفة اللون " B : " الحصول على ثلاث كريات مجموع أرقامها معدوم "

2) أ . أحسب احتمال الحادثة : $\bar{A} \cap B$.

ب. استنتج أنّ احتمال الحادثة $\bar{A} \cup B$ ، هو $\frac{19}{120}$.

3) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب لثلاث كريات عدد الكريات المتبقية التي تحمل الرقم 0 .

أ. عيّن القيّم الممكنة لـ X ثمّ عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X .

ب. أحسب احتمال الحادثة : " $2 - lnX \geq 0$ "

التمرين الثاني : (04.5 ن)

1) $P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z المعرف كمايلي :

$$P(z) = z^3 + (2-\sqrt{3})z^2 + (3-2\sqrt{3})z + 6 .$$

أ. أحسب $P(-2)$ ثمّ عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون : $P(z) = (z+2)(z^2+az+b)$

ب. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 0$.

2) نعتبر في المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.النقط A ، B و C لواحقها:

$z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -2$ على الترتيب .

أ. أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي ثمّ استنتج أنّ النقط A ، B و C تنتمي الى نفس الدائرة .

ب. عين z_E و z_F لواحق النقطتين E و F حتى يكون المثلثين ABF و ACE قائمين في A و C على الترتيب .

ج. عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقي .

3) أ. أكتب العدد L على الشكل الأسي حيث : $L = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$.

ب. حدد مع التعليل طبيعة المثلث ABC .

ج. عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

4) عيّن ثمّ أنشئ (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $z = ke^{-i\frac{2\pi}{3}}$ عندما k يمسح $\mathbb{R}_+^*$.

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـــ : $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2^{1-n}(u_n)^2$

1) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le 2^{n-1}$.

2) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة نحو عدد حقيقي يطلب تعيينه .

3) نعتبر المجموع S_n حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

- بيّن أنّ : $0 \le S_n \le 2^n - \frac{1}{2}$.

نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـــ : $v_n = n - \frac{ln(u_n)}{ln2}$.

1) برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية ، ثمّ أكتب v_n بدلالة n .

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^{n-2^n}$ ، ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) أكتب T_n بدلالة n حيث : $T_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ : $g(x) = (1-x)e^x + 1$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ثمّ أدرس اتجاه تغيّرات الدالة g على المجال $[1;+\infty[$ و شكل جدول تغيّراتها .

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1{,}27 < \alpha < 1{,}28$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $[1;+\infty[$.

II. لتكن الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ : $f(x) = e^x - ln(x-1)$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = 1cm$ و $\|\vec{i}\| = 0{,}5cm$

1) بين أنّ : $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha-1}$ ثمّ أعط حصرا لـ $f(\alpha)$.

2) أ. بيّن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ أنّ : $f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{x-1}{x} \times \frac{ln(x-1)}{x-1}\right)$.

ب. استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

3) أحسب : $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} f(x)$ ثمّ فسر النتيجة بيانيا .

4) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x-1}$ ،

5) هل المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ؟ علل .

6) شكل جدول تغيّرات الدالة f ثمّ أنشئ المنحنى (C_f) على المجال من $]1;e]$.

7) أ. تحقق أنّ الدالة $x \mapsto (x-1)ln(x-1) - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto ln(x-1)$ على المجال $]1;+\infty[$.

ب. أحسب بالسنتمتر المربع المساحة $\mathcal{A}$ للحيّز المستوي الحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما : $x = 1{,}5$ و $x = 2$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

نعتبر في المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.النقط A ، B و C لواحقها: $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ و $z_C = z_A e^{i\frac{5\pi}{6}}$ على الترتيب .

1) حل في ي مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 2z + 4 = 0$.

2) أحسب كلا من $|z_A|$ ، $|z_B|$ و $|z_C|$ ثمّ استنتج أنّ النقط A،B و C تنتمي الى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

3) أ. أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي .

ب. أكتب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الأسي ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABO .

4) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقي موجب تماما ثمّ اكتب $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2024}$ على الشكل الجبري .

5) عيّن مجموعة النقط من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\left|\frac{iz-\sqrt{3}-i}{\bar{z}}\right| = 1$

التمرين الثاني : (04.5 نقاط)

I. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ كمايلي : $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$.

- أدرس اتجاه تغيّر الدالة f .

II. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـــ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

1) أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 3$.

ب. أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

ج. هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ برر اجابتك .

2) أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(3 - u_n)$.

ب. استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 3 - u_n \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

ج. أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

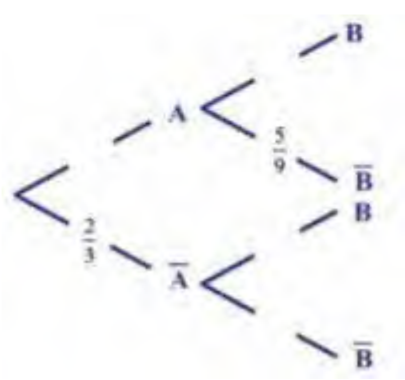
أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $8\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right) + 3(n+1) \leq S_n \leq 3(n+1)$.

ب. أحسب : $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين الثالث : (04.5 نقاط)

يحتوي كيس U_1 على **خمس** كريات حمراء و**أربع** كريات بيضاء ، و يحتوي كيس U_2 على **أربع** كريات حمراء و **ثلاث** كريات بيضاء ،(الكريات كلها متماثلة و لانفرق بينها باللمس) .

نرمي زهر نرد غير مزيف ، اذا تحصلنا على رقم مضاعف لــ 3 نسحب كريتين في آن واحد من الكيس U_1 ، وفي باقي الحالات نسحب كريتين على التوالي معارجاع الكرية المسحوبة من U_2 .



نسمي الحدث A : " الحصول على رقم مضاعف لـ 3 "

B : " الحصول على كريتين من نفس اللون "

1) أنقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثمّ أكملها .

2) أحسب $P(B)$.

3) علما أنّ الكريتين المسحوبتين من نفس اللون ماهو احتمال ان تكونا من الكيس U_2 .

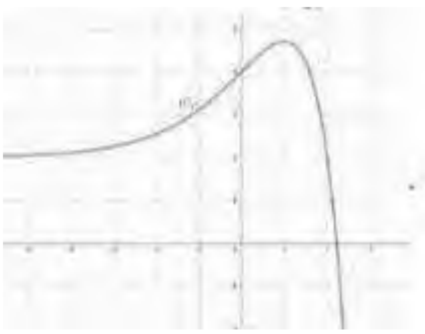
4) نعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة العدد 2 في حال كانت الكريتان من نفس اللون و العدد 1- في حال كانت الكريتان مختلفتين في اللون .

أ. عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X .

ب. بيّن أنّ $E(X) = \frac{205}{441}$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (2-x)e^x + 2$. و (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. (كما في الشكل)



1) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $2{,}21 < \alpha < 2{,}22$.

2) بقراءة بيانية عيّن إشارة $g(x)$ ثمّ استنتج إشارة $g(-x)$ على $\mathbb{R}$

II. f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{x^2}{1+e^{-x}}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ثمّ فسر بيانيا نتيجة النهاية الأخيرة .

2) أ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{x.g(-x)}{(1+e^{-x})^2}$.

ب. استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكل جدول تغيّراتها .

ج. بيّن أنّ $f(-\alpha) = \alpha(\alpha-2)$ ثمّ أعط حصرا للعدد $f(-\alpha)$

3) أ. بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا β حيث : $1{,}1 < \beta < 1{,}2$.

ب. حل في المعادلة $E\big(f(x)\big) = 0$ حيث E هي دالة الجزء الصحيح .

4) ليكن (Γ) المنحنى الممثل للدالة $x \longmapsto x^2$ على $\mathbb{R}$.

أ. بيّن أنّ : $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x^2] = 0$ ، ثمّ فسر النتيجة بيانيا .

ب. أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (Γ) .

5) أنشئ (Γ) و (C_f) . (تعطى : $f(-\alpha) \approx 0.48$)

6) ناقش بيانيا وحسب قيّم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m عدد حلول المعادلة : $f(x) = x^2 + ln(m)$.

7) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $0 \le f(x) \le x^2$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $\mathcal{A}$ الذي يمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) ، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = 0$ و $x = 1$.

انتهى الموضوع الثاني .