الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية
مجمّع التربية و التعليم الخاص - دار النجاح -

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2024
الشعبة : علوم تجريبيّة — الأستاذ : لقمان بعون
اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأوّل

## التمرين الأوّل : (4 نقاط)

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة لانميز بينها باللمس، منها : 5 كريات بيضاء مرقمة بـ: 0 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 و4 كريات حمراء مرقمة بـ: $-1$ ; $-2$ ; 0 ; 1. وكرية خضراء مرقمة بـ: 2 .
نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريات في آن واحد . أحسب احتمال تحقق الأحداث التالية :

1. $A$ : " الكريات المسحوبة من نفس اللون " $B$ : "من بين الكريات المسحوبة يوجد لونين على الأقل"
$C$ : "جداء ارقام الكريات المسحوبة معدوم " $D$ : "مجموع ارقام الكريات المسحوبة يساوي 3 " .
2. أحسب احتمال الحصول على 3 كريات مجموع أرقامها يساوي 3 علما أنها من نفس اللون .
3. نعتبر المتغير العشوائي $X$ الذي يرفق بكل سحبة العدد $x+\alpha$.
حيث $x$ هو عدد الألوان المتحصل عليها في السحبة الواحدة، $\alpha$ عدد حقيقي .
أ) حدّد قيم المتغير العشوائي $X$ بدلالة $\alpha$ ثم عرف قانون احتماله .
ب) أوجد قيمة $\alpha$ بحيث : $E(X)=\dfrac{40521}{20}$.

## التمرين الثاني : (4 نقاط)

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرّفة بـ $u_0=e^4-1$ و من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=-1+e\sqrt{u_n+1}$ .

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ : $u_n+1>e^2$ .
2. أ) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ ثمّ استنتج أنّها متقاربة .
ب) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}+1-e^2<\dfrac{1}{2}\left(u_n+1-e^2\right)$ .
جـ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n$: $0<u_n+1-e^2<\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\left(e^4-e^2\right)$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ .
3. المتتالية $(v_n)$ معرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ بـ : $v_n=-1+\ln(\sqrt{u_n+1})$ .
أ) بيّن أنّ المتتالية $(v_n)$ هندسيّة أساسها $q=\frac{1}{2}$ يطلب إيجاد حدّها الأوّل .
ب) أكتب عبارة $v_n$ بدلالة $n$ ثمّ استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$ . ثمّ تأكّد مرة أخرى من $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ .


منصة القلم الجزائري | DZPEN.COM

4. أحسب المجموع $S$ حيث : $S = \ln(u_0+1) + \ln(2(u_1+1)) + \cdots + \ln(4048(u_{2024}+1))$

## التمرين الثالث : (5 نقاط) إختر الاجابة الصحيحة الوحيدة في كلّ حالة مع التبرير:

1. إذا كان $\int_1^2 f'(x)f''(x)dx = 8$ و $f'(2) - f'(1) = 2$ فإنّ قيمة $f'(2) + f'(1)$ تساوي

أ) 8 ب) 16 ج) 4

2. إذا كان $\theta \in [\frac{-\pi}{2}; 0[$ فإنّ الشكل الأسّي للعدد المركّب $z = 1 - e^{i\theta}$ هو :

أ) $z = 2\cos\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)e^{i(\frac{\pi+\theta}{2})}$ ب) $z = \cos\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)e^{i(\frac{\pi+\theta}{2})}$ ج) $z = 2\cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)e^{i(\frac{\pi+\theta}{2})}$

3. المتتالية العددية $(w_n)$ معرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = 4\times 5^n - 2n + 1$

نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$

$S_n$ يساوي: أ) $5^{n+1} - (n+1)^2$ ب) $5^{n+1} - n^2$ ج) $5^n - n^2$

4. من بين 8 رجال و 5 نساء إحتمال إختيار لجنة مكوّنة من 5 أعضاء من بينهم رئيس و نائب بحيث يكون الرئيس رجل و النائب إمرأة يساوي أ) $\frac{11}{39}$ ب) $\frac{4}{9}$ ج) $\frac{10}{39}$

5. القيمة المضبوطة للتكامل $\int_0^1 \frac{x}{1+e^{-x^2}}dx$ تساوي أ) $\sqrt{\ln\frac{1+e}{2}}$ ب) $\ln\sqrt{\frac{1+e}{2}}$ ج) $\ln\sqrt{1+e}$.

## التمرين الرابع : (7 نقاط)

I. لتكن الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = e^{-x} - x + 1$ .

1. أدرس اتجاه تغير الدالة $g$ ثمّ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $1.2 < \alpha < 1.3$.

2. حدّد حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(-x)$ .

II. نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{xe^x}{1+e^x}$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(C_f)$ $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و فسّر النتيجة بيانيا، ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

2. أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x) = \frac{e^x g(-x)}{(1+e^x)^2}$

ب) بيّن أنّ الدالّة $f$ متزايدة تماما على $[-\alpha; +\infty[$ و متناقصة تماما على $]-\infty; -\alpha]$ ثمّ شكل جدول تغيّراتها .

3. أ) بين أن $y = x$ معادلة لـ $(\Delta)$ المستقيم المقارب المائل لـ $(C_f)$ بجوار $+\infty$ .

ب) أدرس الوضع النسبي بين $(\Delta)$ و $(C_f)$ . جـ ) بيّن أنّ $f(-\alpha) = 1 - \alpha$ ثمّ جد حصرا للعدد $f(-\alpha)$ .

4. أنشئ $(\Delta)$ و $(C_f)$ ثمّ ناقش بيانيّا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x) = f(m)$.

5. لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بـ $(C_f)$ و محور الفواصل و المستقيمين اللّذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = 1$.

بيّن أنّه من أجل كلّ $x \in [0; 1]$ : $\frac{x}{e+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{xe}{2}$ ثمّ بيّن أنّ $\frac{1}{2(e+1)} \leqslant \mathcal{A} \leqslant \frac{e}{4}$ .

إنتهى الموضوع الأوّل


منصة القلم الجزائري | DZPEN.COM

# الموضوع الثاني

## التمرين الأوّل : (4 نقاط)

$(u_n)$ متتالية هندسيّة متزايدة تماما ، حدودها موجبة تماما حدّها الأوّل $u_0$ و أساسها $q$ حيث : $\begin{cases} \ln(u_1)+\ln(u_2)=11 \\ u_1+u_2=e^4(1+e^3) \end{cases}$

1. أحسب $u_1$ ، $u_2$ ثمّ استنتج قيمة الأساس $q$ .

نضع فيما يلي : $u_1=e^4$ و $q=e^3$

2. جد $u_0$ و عبّر عن $u_n$ بدلالة $n$ ، ثمّ أكتب $S_n$ بدلالة $n$ حيث : $S_n=\ln u_0+\ln u_1+\cdots+\ln u_n$ .

نضع من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ : $w_n=2n-3+e^{3n+1}$ .

3. تحقق أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ : $w_n=v_n+u_n$ حيث $(v_n)$ متتالية حسابيّة يطلب تحديد أساسها و حدّها الأوّل .

نضع من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ : $t_n=w_0+w_1+\cdots+w_n$

4. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ : $t_n=(n+1)(n-3)+\dfrac{e^{3n+4}-e}{e^3-1}$ .

## التمرين الثاني : (4 نقاط)

صندوق $U_1$ يحتوي ثلاث كريات حمراء و كريّتين سوداوين و صندوق $U_2$ يحتوي على كريّتين حمراوين و ثلاث كريات سوداء . كريّات كلّ كيس متماثلة و لا نفرّق بينها باللّمس .

نختار عشوائيا صندوقا من الصندوقين فإذا كان $U_1$ نسحب منه كريّتين في آن واحد و إذا كان $U_2$ نسحب منه كريّتين على التوالي بحيث لا نعيد الكريّة المسحوبة الأولى قبل السحب الموالي . نسمّي الحدث $R_i$ سحب $i$ كريّة حمراء مع $i\in\{0;1;2\}$

1. بيّن أنّ $P_{U_1}(R_1)=\dfrac{3}{5}$ .

2. أ) أنقل شجرة الاحتمالات على ورقة إجابتك ثمّ أكملها. أنظر الوثيقة المرفقة

ب) أحسب $P(R_1)$ .

جـ) أحسب احتمال الحصول على كريّتين لهما نفس اللّون من $U_1$ .

3. إذا علمت أنّ الكريّتين المسحوبتين من نفس اللّون ما هو إحتمال أن تكونا من $U_1$ .

4. نعتبر اللّعبة التالية:في التجربة السابقة يحصل لاعب على 10 نقاط لكلّ كريّة حمراء مسحوبة و يحصل على $-7$ نقاط لكلّ كريّة سوداء مسحوبة و ليكن المتغيّر العشوائي $X$ الذي يرفق بكلّ إمكانيّة سحب مجموع النقاط المحصّل عليها.

أ) هل اللّعبة في صالح اللّاعب .

ب) أحسب $P\left(\log\left(\frac{X}{2}\right)>0\right)$.

## التمرين الثالث : (5 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-(2+\sqrt{2})z+2+\sqrt{2}=0$ .


منصة القلم الجزائري | DZPEN.COM

2. ليكن $a$ العدد المركّب المُعرّف بـ : $a = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

أ) بيّن أنّ $|a| = \sqrt{2+\sqrt{2}}$. حيث $|a|$ تمثل طويلة العدد المركب $a$ .

ب) بيّن أنّ $a = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، ثمّ استنتج أنّ $a = 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}$ .

3. استنتج قيمة كلّا من $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ .

4. أ) بيّن أنّ العدد $a^{2020}$ تخيّلي صرف و أنّ $a^{2024}$ حقيقي .

ب) جد أكبر قيمة للعدد الطبيعي $n$ حتى يكون $|a|^n < 2024$ .

جـ) جد مجموعة النقط $M$ ذات اللّاحقة $z$ من المستوي التي تحقق $|z-a| = |-8+6i|$ .

5. حدّد صورة العدد $a$ بالدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه $w$ ذات اللاحقة $z_w = -2$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$ .

## التمرين الرابع : (7 نقاط)

I. لتكن الدالة $g$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = a\ln(x) - \frac{b}{x} + 1$ و $(C_g)$ تمثيلها البياني .

1. إذا علمت أن المنحنى $(C_g)$ يقبل عند النقطة $A(e;2)$ مماسًا معامل توجيهه $3e^{-1}$ بيّن أنّ : $a = 2$ و $b = e$ .

2. أدرس تغيّرات الدالة $g$ . ثمّ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $[1,49;1,51]$ .

3. أدرس إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$ .

II. نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{\ln(x) + xe}{x^2}$ ، $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$ .

1. أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ثمّ فسّر النتائج بيانيّا .

2. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ موجب تماما : $f'(x) = \frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3}$ . ثمّ أدرس اتجاه تغيّر $f$ و شكّل جدول تغيّراتها.

3. بيّن أنّ : $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha\left(\frac{e+\alpha}{2}\right)$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ .

4. بيّن أنّ المنحنى $\left(C_f\right)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $x_0$ حيث $0,3 < x_0 < 0,4$ .

5. أنشئ كلّا من $\left(C_f\right)$ و مستقيماته المقاربة .

III. نضع من أجل كلّ $n$ من $\mathbb{N}$ : $A_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} f(x)dx$ ; $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln(x)}{x^2}dx$

أ) باستعمال التكامل بالتجزئة بيّن أنّ : $I_n = \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}}$ . ثمّ بيّن أنّ : $A_n = I_n + e$

ب) أحسب $I_0$ و $A_0$ و أعط تفسيرا هندسيا للعدد $A_0$ . ثمّ بيّن أنّ المتتالية $(A_n)$ متقاربة نحو العدد $e$ .

إنتهى الموضوع الثاني


منصة القلم الجزائري | DZPEN.COM

## الوثيقة المرفقة الخاصّة بالتمرين الثاني من الموضوع الثاني