وزارة التربية الوطنية
مديرية التربية لولاية جيجل
المقاطعة الأولى -جيجل

إمتحان البكالوريا التجريبي
دورة: مـــــاي 2024م
الشعبة: ريــاضيات

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 4 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأوّل:

التمرين الأول: (05 نقاط)

I/ في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب: $Z_A=1+i$ ، $Z_B=\overline{Z_A}$ ، $Z_C=-1+i$ و $Z_D=-Z_A$.

1/ ا/ أكتب كلا من العددين Z_A و Z_C على الشكل الأسي ثم استنتج الشكل الأسي لكل من Z_B و Z_D .

ب/ استنتج أن النقط A و B و C و D تنتمي إلى نفس الدائرة (Γ) معينا عناصرها المميزة.

2/ ا/ أكتب العدد $\dfrac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب/ عين صورة B بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$.

3/ بين أن مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z التي تحقق: $\overline{Z}=Z_Ae^{i\theta}$ بحيث θ عدد حقيقي يمسح $\mathbb{R}$ هي نفسها الدائرة (Γ) .

II/ نضع في وعاء عشرة كريات متماثلة لا يمكن التمييز بينها باللمس، مرقمة بالأعداد المركبة:

Z_A ، Z_B ، Z_C ، Z_D ، $3i$ ، $-3i$ ، 2 ، -2 ، $\sqrt{5}$ ، $-\sqrt{5}$.

نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من هذا الوعاء.

1/ أُحسب احتمال الحدثين: E «الكريتان المسحوبتان تحمل كل منهما عددا حقيقيا صرفا»

F «الكريتان المسحوبتان تحمل كل منهما عددا مركبا له عمدة θ حيث: $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$»

2/ ا/ أحسب $P_F(E)$.

ب/ هل الحدثان E و F مستقلان؟ برّر إجابتك.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1/ عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n التي من أجلها يكون العدد: $M_n=4C_{n+1}^2-A_{n+3}^2+2$ مضاعفا للعدد 7 . (لاحظ أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $n^2+4n+3=(n+2)^2-1$)

2/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .

3/ ليكن العدد الطبيعي T_n الذي يُكتب في نظام العد ذو الأساس خمسة بالشكل: $T_n=\overline{\underbrace{111\cdots1}_{(n+1)\text{ رقمًا}}}$.

ا/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4T_n=5^{n+1}-1$ ، ثم استنتج أن: $PGCD(T_n;5^n)=1$.

ب/ ليكن m عددا طبيعيا. بين أن: ($4T_n\equiv m\ [7]$) يكافئ ($T_n\equiv 2m\ [7]$) .

ج/ استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد: $N = T_{2024} + 2T_{1445}$ على 7 .

4/ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $5^n x + T_n y = 1 \quad \cdots \quad (E_n)$.

- بين أن المعادلة (E_n) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$ ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_2) .

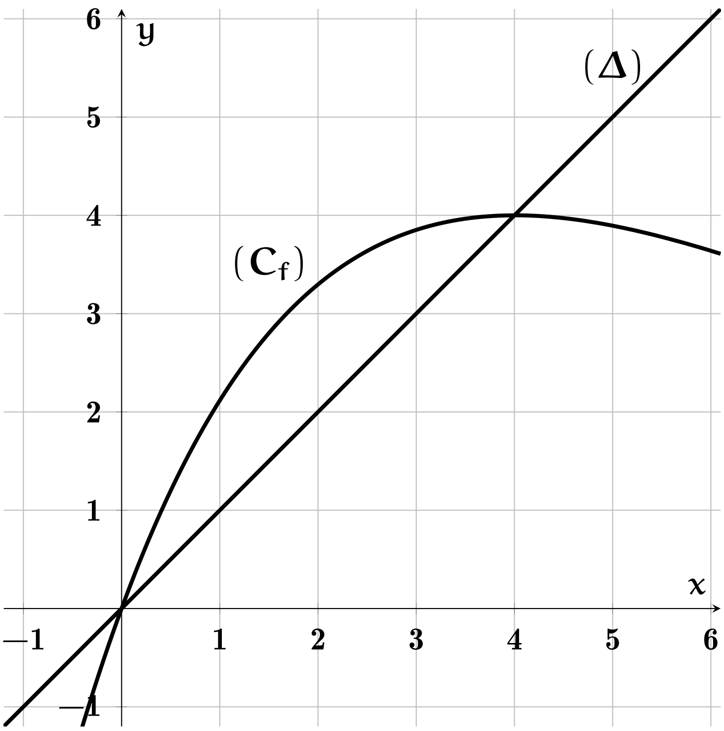
التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n e^{1-\frac{1}{4}u_n}$.

في الشكل المقابل المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث:

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = xe^{1-\frac{1}{4}x}$ ،

و (Δ) هو المستقيم ذو معادلة $y = x$.



1/ ا/ بقراءة بيانية، بين أنه من أجل كل x من المجال $[0;4]$ فإن: $f(x) \in [0;4]$.

ب/ أنقل الشكل المقابل، ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n).
(دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء)

ج/ ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ ا/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n \leq 4$.

ب/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ ثم استنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) .

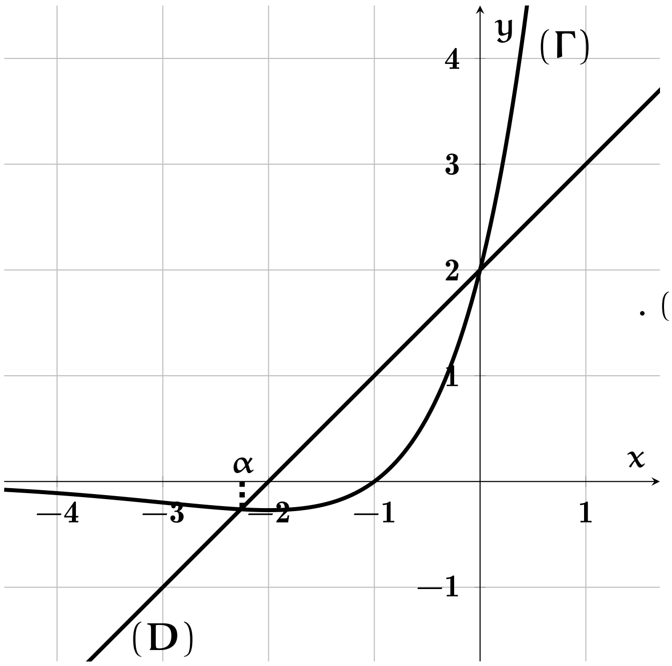
3/ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم أُحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4/ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نعتبر: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.

ا/ أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $u_n = e^{n-\frac{1}{4}S_n}$.

ب/ بين أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 4$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)



I/ في الشكل المقابل: (Γ) هو التمثيل البياني للدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $x \longmapsto (2x+2)e^x$

و (D) هو المستقيم ذو معادلة $y = x + 2$.

(Γ) و (D) يتقاطعان في نقطتين فاصلتيهما 0 و α حيث $-2.3 < \alpha < -2.2$.

1/ بقراءة بيانية، حدد وضعية (Γ) بالنسبة إلى (D) .

2/ استنتج حسب قيم x من $\mathbb{R}$ إشارة:
$g(x) = -x - 2 + 2(x+1)e^x$.

II/ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـالعبارة:

$$f(x) = x(e^x - 1)^2$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ ا/ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

ج/ أُدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

2/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $x(e^x - 1) \geq 0$ ، ثم استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ وشكّل جدول تغيراتها.

3/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f''(x) = 2e^x g(x)$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف معينا فاصلتيهما.

4/ أُكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 ، ثم أثبت أنه المماس الوحيد الذي يمر من المبدأ.

5/ ا/ أنشئ (Δ) و (C_f) بدقة. (الوحدة: $2cm$)

ب/ عين قيم العدد الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = mx$ ثلاثة حلول مختلفة.

6/ ا/ باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن: $\int_0^{\ln 2} x.e^x(e^x - 2)dx = \frac{1}{4}(5 - 8\ln 2)$.

ب/ استنتج بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات: $x = 0$ و $x = \ln 2$ و $y = x$.

انتهى الموضوع الأوّل.

الموضوع الثّاني:

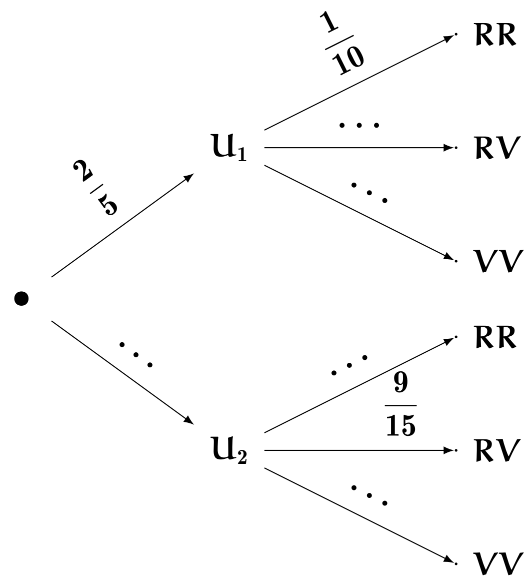
التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 كريتين حمراوين وثلاث كريات خضراء، ويحتوي صندوق U_2 ثلاث كريات حمراء و كريتين خضراوين؛ بحيث كل الكريات متماثلة، لا يمكن التفريق بينها باللمس.

نسحب ثلاث كريات كما يلي: نسحب كرية واحدة من الصندوق U_1 ونسجل لونها؛

فإذا كانت حمراء نعيدها إلى الصندوق U_1 ثم نسحب كريتين في آن واحد من U_1 ،

وإذا كانت خضراء نضعها داخل الصندوق U_2 ثم نسحب كريتين في آن واحد من U_2 .



1/ أنقل ثم أتمم شجرة الإحتمالات المقابلة:

(نرمز للكريات الحمراء بـ R وللخضراء بـ V)

2/ أحسب احتمال الحدثين التاليين:

A «الكريات الثلاث المسحوبة من نفس اللون»

B «الحصول على كرية حمراء على الأقل»

3/ بيّن أن: $P_A(U_2) = \frac{3}{4}$.

4/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات عدد الكريات الخضراء المتبقية في الصندوق U_1 .

ا/ برّر أن قيم المتغير العشوائي X هي: 1 ، 2 و 3 .

ب/ عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

ج/ أحسب الاحتمال: $P\left(C_3^X = 3\right)$.

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

I/ في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ؛ نعتبر النقط A ، I و C لواحقها على الترتيب: $Z_A = -2$ ، $Z_I = -1$ و $Z_C = i$.

(γ) الدائرة التي مركزها I ونصف قطرها 1 ، و B نقطة من (γ) حيث: $\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{8}$.

1/ علّم النقط A و I و C ، ثم أنشئ الدائرة (γ) . (الوحدة $2cm$)

2/ استنتج طويلة العدد المركب $Z_B + 1$ وبين أن عمدة له هي: $\frac{\pi}{4}$ ، ثم استنتج الشكل الجبري لـ Z_B .

3/ أثبت أن العدد $\frac{Z_B+1}{i+1}$ حقيقي. ماذا تستنتج؟

II/ نرفق بكل نقطة M تختلف عن I ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث: $Z' = \frac{i(Z+2)}{Z+1}$.

1/ ا/ أثبت أن $\arg(Z') = \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{MI};\overrightarrow{MA}\right)$.

ب/ عين مجموعة النقط M بحيث يكون Z' تخيليا صرفا.

2/ ا/ أثبت أن $Z' - i = \dfrac{i}{Z+1}$.

ب/ نضع $Z = -1 + e^{i\theta}$ حيث $\theta \in]-\pi;\pi]$.

- استنتج أنه عندما تمسح النقطة M الدائرة (γ) فإن النقطة M' تمسح دائرة (γ') يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

1/ ا/ عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2009^2 على 16 .

ب/ استنتج أن: $2009^{8001} \equiv 2009\,[16]$.

2/ نعرف المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$ كالتالي: $\begin{cases} u_0 = 2009^2 - 1 \\ u_{n+1} = (u_n+1)^5 - 1 \end{cases}$

ا/ بين أن u_0 يقبل القسمة على 5 .

ب/ بين باستعمال دستور ثنائي الحد أن: $u_{n+1} = u_n\left[u_n^4 + 5\left(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1\right)\right]$.

ج/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن u_n مضاعف لـ 5^{n+1} .

3/ ا/ تحقق أن: $u_3 = 2009^{250} - 1$.

ب/ استنتج أن: $2009^{250} \equiv 1\,[625]$ و $2009^{8001} \equiv 2009\,[625]$.

4/ ا/ لتكن a و b و c أعدادا صحيحة غير معدومة.

برهن أنه إذا كان a مضاعفا لـ b و c وكان $PGCD(b;c) = 1$ فإن a مضاعف للجداء bc.

ب/ بين أن: $2009^{8001} - 2009$ يقبل القسمة على 10000 .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I/ نعتبر g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$.

1/ أُدرس تغيرات الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.

2/ استنتج أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ يكون: $g(x) > 0$.

II/ لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $\begin{cases} f(x) = x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) + x + 1 \quad ; \quad x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ ا/ بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = 1$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

2/ ا/ أُدرس قابلية إشتقاق الدالة f على يمين 0 ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ يكون: $f'(x) = g(x) + 1$ ، ثم استنتج إتجاه تغير الدالة f وشكّل جدول تغيراتها.

3/ أُحسب $f(1)$ ، ثم أنشئ (Δ) و (C_f) بدقة. (الوحدة: $2cm$)

4/ ا/ بين أن الدالة F المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة: $F(x) = \frac{1}{2}xf(x) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + x$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ب/ استنتج بــ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات: $x = \frac{1}{2}$ و $x = 1$ و $y = 0$.

5/ لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

ا/ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون: $u_n = e^{f(n)-n-1}$.

ب/ أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما. [يمكنك الإستفادة من نتيجة السؤال (II / 2/ ب/)]

ج/ بيّن أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$ ، ماذا تستنتج؟

انتهى الموضوع الثاني.

رابط الإطلاع على الموضوع إلكترونيا، مع الإجابة النموذجية وسلم التنقيط:
(تُرفع الإجابة النموذجية بعد انتهاء فترة الإختبار مباشرة)

☺☺بالتوفيق للجميع في شهادة البكالوريا☺☺

الإجابة النموذجية للبكالوريا التجريبية –مــاي 2024– في مادة الرياضيات (شعبة الرياضيات):

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (05 نقاط)

I/1/ ا/ كتابة الأعداد على الشكل الأسي:

لدينا: $|Z_A|=\sqrt{2}$ و $\arg(Z_A)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ إذن:

• $\boxed{Z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$.

ولدينا: $|Z_C|=\sqrt{2}$ و بوضع $\arg(Z_C)=\theta$ فإن:

$\begin{cases}\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ وبالتالي: $\theta=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

إذن: • $\boxed{Z_C=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$.

الإستنتاج:

• $Z_B=\overline{Z_A}=\boxed{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}=Z_B}$.

• $Z_D=-Z_A=e^{i\pi}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i(\pi+\frac{\pi}{4})}=\boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}=Z_D}$

ب/ الإستنتاج:

لدينا: $|Z_A|=|Z_B|=|Z_C|=|Z_D|=\sqrt{2}$ ،

إذن: النقط A و B و C و D تنتمي إلى نفس الدائرة (Γ) التي مركزها المبدأ O ونصف قطرها $r=\sqrt{2}$.

2/ ا/ كتابة العدد على الشكل الأسي:

$$\frac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}=\frac{1-i-1-i}{-1+i-1-i}=\frac{-2i}{-2}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

طبيعة المثلث ABC :

من الشكل الأسي نستنتج أن: $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

وأن: $AB=AC$ ، إذن المثلث ABC هو مثلث قائم في A ومتساوي الساقين.

ب/ صورة النقطة B بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$:

ولتكن M ذات اللاحقة Z ، وذلك معناه أن: $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AC}$

وعليه: $Z-Z_B=Z_C-Z_A$ إذن:

$$Z=Z_C-Z_A+Z_B=-1+i-1-i+1-i=-1-i=Z_D$$

إذن صورة النقطة B بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ هي النقطة D .

الإستنتاج:

لدينا $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ فالرباعي ABDC متوازي أضلاع،

وبما أن المثلث ABC هو مثلث قائم في A ومتساوي الساقين،

إذن الرباعي ABDC مربع.

3/ مجموعة النقط:

لدينا: $\overline{Z}=Z_Ae^{i\theta}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\theta}=\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\theta)}$

ومنه: $Z=\sqrt{2}e^{-i(\frac{\pi}{4}+\theta)}=\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4}-\theta)}=\sqrt{2}e^{i\theta'}\ ;\ \theta'=-\frac{\pi}{4}-\theta$

لما θ يمسح $\mathbb{R}$ فإن θ' يمسح $\mathbb{R}$ كذلك، وعليه تُصبح العلاقة:

$\boxed{Z=\sqrt{2}e^{i\theta'};\theta'\in\mathbb{R}}$ وذلك معناه أن: $|Z|=\sqrt{2}$ أي: $OM=\sqrt{2}$

إذن مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها المبدأ O و نصف قطرها $\sqrt{2}$ و هي نفسها الدائرة (Γ) .

II/ وعاء به عشر كريات ونسحب عشوائيا منه كريتين في آن واحد،

إذن عدد الحالات الكلية للسحب هو: $C_{10}^2=45$.

1/ حساب الإحتمالات:

الحدث E : عدد الأرقام الحقيقية الصرفة في الوعاء هو 4 إذن:

• $P(E)=\frac{C_4^2}{45}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$.

الحدث F : عدد مركب له عمدة تنتمي إلى المجال $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ معناه جزؤه الحقيقي موجب، وعددها في الكيس هو 6 إذن:

$\bullet P(F) = \frac{C_6^2}{45} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.

2/ أ/ الإحتمال الشرطي:

$\bullet P_F(E) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)} = \frac{C_2^2}{15} = \frac{1}{15}$.

ب/ الحدثان E و F غير مستقلين، لأن: $P_F(E) \neq P(E)$.

(أو نقول لأن: $P(E)\times P(F) = \frac{2}{45} \neq P(E\cap F)$)

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1/ تعيين قيم n من $\mathbb{N}^*$ بحيث يكون العدد M_n مضاعفا لـ 7 :

لدينا: $\bullet M_n = 4C_{n+1}^2 - A_{n+3}^2 + 2 = 4\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} - \frac{(n+3)!}{(n+1)!} + 2$

$= 2(n+1)n - (n+3)(n+2) + 2$

$= 2n^2+2n-n^2-3n-2n-6+2 = \boxed{n^2-3n-4 = M_n}$

M_n مضاعف للعدد 7 معناه $M_n \equiv 0[7]$ ومنه: $n^2-3n-4\equiv 0[7]$

وبالتالي: $n^2+4n+3\equiv 0[7]$ أي: $(n+2)^2-1\equiv 0[7]$

ومنه: $(n+1)(n+3)\equiv 0[7]$ وبما أن 7 عدد أولي، فإن:

$n+1\equiv 0[7]$ أو $n+3 \equiv 0[7]$ ومنه: $n\equiv -1[7]$ أو $n\equiv -3[7]$

أي: $n\equiv 6[7]$ أو $n\equiv 4[7]$ إذن: $\boxed{n\in\{7k+4;7k+6 / k\in\mathbb{N}\}}$.

2/ دراسة بواقي القسمة الإقليدية:

لدينا: $5^0\equiv 1[7]$ و $5^1\equiv 5[7]$ و $5^2\equiv 4[7]$ و $5^3\equiv 6[7]$ و $5^4\equiv 2[7]$

و $5^5\equiv 3[7]$ و $5^6 \equiv 1[7]$ وعليه:

$n =$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$k\in\mathbb{N}$
$5^n \equiv$	1	5	4	6	2	3	[7]

3/ أ/ الإثبات أن $4T_n = 5^{n+1}-1$:

$\bullet T_n = 5^0+5^1+\dots+5^n = 5^0\left(\frac{5^{n+1}-1}{5-1}\right) = \frac{1}{4}(5^{n+1}-1)$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $\boxed{4T_n = 5^{n+1}-1}$.

الإستنتاج: لدينا $4T_n = 5^{n+1}-1$ ومنه $\boxed{5\times 5^n - 4\times T_n = 1}$ ،

إذن حسب مبرهنة بيزو: $PGCD(5^n;T_n)=1$.

ب/ **إثبات التكافؤ:** ليكن m عددا طبيعيا:

$4T_n\equiv m[7]$ يكافئ $8T_n \equiv 2m[7]$ يكافئ $T_n\equiv 2m[7]$.

ج/ استنتاج باقي قسمة العدد N على 7 :

لدينا: $4T_{2024} = 5^{2025}-1$ وبما أن: $2025 = 337(6)+3$

فإن: $5^{2025}\equiv 6[7]$ وبالتالي: $4T_{2024}\equiv 5[7]$ إذن: $T_{2024}\equiv 10[7]$

أي: $\boxed{T_{2024}\equiv 3[7]}$ $\cdots$ (1)

ولدينا: $4T_{1445} = 5^{1446}-1$ وبما أن $1446 = 241(6)$

فإن: $5^{1446}\equiv 1[7]$ وبالتالي: $4T_{1445}\equiv 0[7]$ إذن: $T_{1445}\equiv 0[7]$

ومنه: $\boxed{2T_{1445}\equiv 0[7]}$ $\cdots$ (2)

من (1) و (2) نجد: $\boxed{N\equiv 3[7]}$ إذن باقي قسمة N على 7 هو 3 .

4/ تبيان أن المعادلة $5^nx+T_ny=1 \cdots (E_n)$ تقبل حلولا:

لدينا $PGCD(5^n;T_n)=1$ إذن المعادلة (E_n) تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{Z}^2$.

حل المعادلة (E_2) : لدينا: $5^2=25$ ولدينا: $T_2 = \frac{1}{4}(5^3-1) = 31$

لدينا حسب السؤال 3/أ/ : $\begin{cases} 5^2x+T_2y=1 \\ 5^2(5)+T_2(-4)=1 \end{cases}$ بالطرح نجد:

$5^2(x-5)+T_2(y+4)=0$ ومنه: $5^2(x-5) = -T_2(y+4)\cdots(*)$ ومنه:

T_2 يقسم $5^2(x-5)$ وبما أن: $PGCD(5^2;T_2)=1$ فإن: T_2 يقسم $x-5$

أي: $x-5 = T_2.k\ ; k\in\mathbb{Z}$ إذن: $\boxed{x=31k+5\ ;\ k\in\mathbb{Z}}$

بالتعويض في $(*)$ نجد: $5^2.31k = -31(y+4)$ ومنه: $5^2.k = -y-4$

إذن: $\boxed{y=-25k-4\ ;\ k\in\mathbb{Z}}$ إذن حلول المعادلة (E_2) هي الثنائيات:

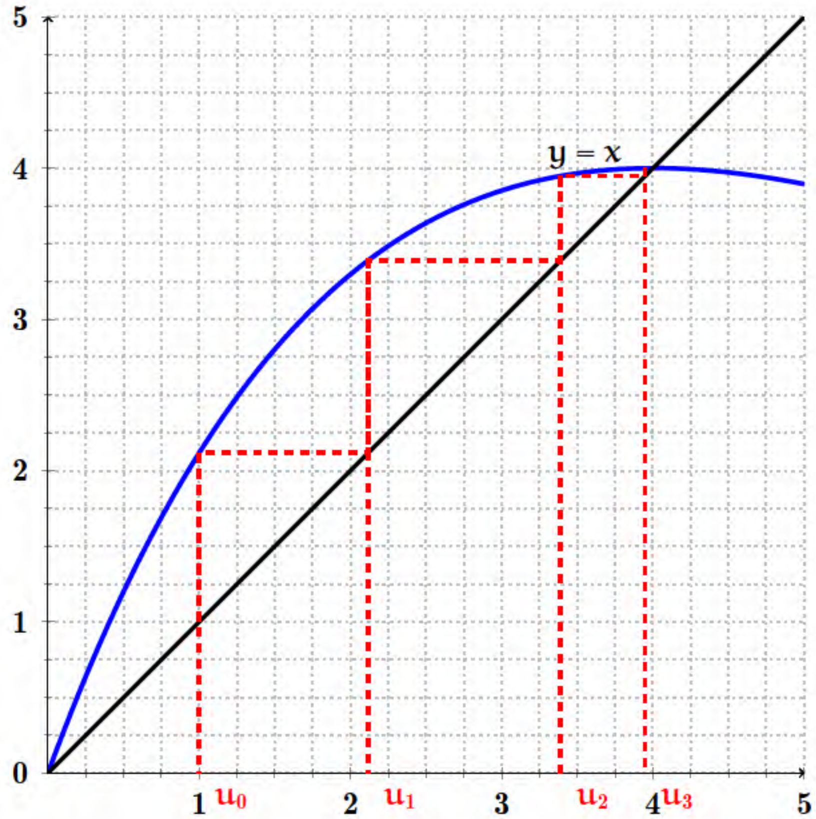
$\boxed{(x;y) = (\ 31k+5\ ;\ -25k-4\ )}$ بحيث $k\in\mathbb{Z}$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1/ ا/ من خلال التمثيل البياني: الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;4]$ ومنه من أجل كل x من هذا المجال فإن: $f(0) \leq f(x) \leq f(4)$ أي $0 \leq f(x) \leq 4$

إذن: $f(x) \in [0;4]$.

ب/ تمثيل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) :



ج/ التخمين:

من خلال التمثيل نخمن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة نحو 4 .

2/ ا/ **البرهان بالتراجع:** نسمي الخاصية $P(n)$: $0 < u_n \leq 4$.

ولنثبت صحتها من أجل كل عدد طبيعي n .

- لدينا من أجل $n = 0$: $u_0 = 1$ أي: $0 < u_0 \leq 4$ أي: $P(0)$ صحيحة.
- لنفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي كيفي n أي: $0 < u_n \leq 4$

ومنه: $0 < f(u_n) \leq 4$ أي: $0 < u_{n+1} \leq 4$.

إذن إذا كانت $P(n)$ صحيحة فإن $P(n+1)$ صحيحة.

- إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n \leq 4$.

ب/ تبيان أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{1-\frac{1}{4}u_n}$

وبما أن: $0 < u_n \leq 4$ ومنه: $1 > 1 - \frac{1}{4}u_n \geq 0$

فإن: $e > e^{1-\frac{1}{4}u_n} \geq 1$ أي: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

استنتاج إتجاه التغير:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ وبما أن u_n ذات حدود موجبة، فإن المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

3/ إستنتاج أن (u_n) متقاربة:

لدينا المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى، إذن هي متقاربة.

حساب النهاية:

المتتالية (u_n) متقاربة معناه: $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ حيث a عدد حقيقي.

ومنه: $a = ae^{1-\frac{1}{4}a}$ وبالتالي: $1 = e^{1-\frac{1}{4}a}$ ومنه: $1 - \frac{1}{4}a = 0$

إذن: $a = 4$ إذن: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 4}$.

4/ $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$

ا/ **إثبات عبارة الحد العام:**

الطريقة 1: لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{1-\frac{1}{4}u_n}$

ومنه: $1-\frac{1}{4}u_n=\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ إذن: $u_n=4-4\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

وبالتالي: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}$

$$=4-4\ln\left(\frac{u_1}{u_0}\right)+4-4\ln\left(\frac{u_2}{u_1}\right)+\cdots+4-4\ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)$$

$$=(4+4+\cdots+4)-4\left(\ln\left(\frac{u_1}{u_0}\right)+\ln\left(\frac{u_2}{u_1}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)\right)$$

$$=4n-4\ln\left(\frac{u_1\times u_2\times\cdots\times u_n}{u_0\times u_1\times\cdots\times u_{n-1}}\right)$$

$$=4n-4\ln(u_n)$$

وعليه: $4n-S_n=4\ln(u_n)$ إذن: $\boxed{u_n=e^{n-\frac{1}{4}S_n}}$.

الطريقة 2: (البرهان بالتراجع)

نسمي الخاصية: $P(n)\ :\ u_n=e^{n-\frac{1}{4}S_n}$.

ولنثبت صحتها من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

- من أجل $n=1$: لدينا من جهة: $u_1=u_0e^{1-\frac{1}{4}u_0}=e^{\frac{3}{4}}$

ومن جهة أخرى: $e^{1-\frac{1}{4}S_1}=e^{1-\frac{1}{4}u_0}=e^{\frac{3}{4}}$ إذن: $P(1)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل n من $\mathbb{N}^*$ كيفي، أي: $u_n=e^{n-\frac{1}{4}S_n}$

لدينا: $u_{n+1}=u_ne^{1-\frac{1}{4}u_n}=e^{n-\frac{1}{4}S_n}e^{1-\frac{1}{4}u_n}=e^{n+1-\frac{1}{4}(S_n+u_n)}$

إذن: $u_{n+1}=e^{(n+1)-\frac{1}{4}S_{n+1}}$ وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\boxed{u_n=e^{n-\frac{1}{4}S_n}}$.

ب/ حساب النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4n-4\ln(u_n)}{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(4-4\frac{\ln(u_n)}{n}\right)=4$$

لأن: $\lim_{n\to+\infty}u_n=4$ ومنه: $\lim_{n\to+\infty}\ln(u_n)=\ln 4$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I/ $(\Gamma)\ :\ y=(2x+2)e^x$ و $(D)\ :\ y=x+2$.

1/ الوضعية النسبية: بقراءة بيانية نجد:

- (Γ) و (D) يتقاطعان في نقطتين فاصلتيهما: 0 و α .
- (Γ) يقع فوق (D) على كل من المجالين: $]-\infty;\alpha[$ و $]0;+\infty[$.
- (Γ) يقع تحت (D) على المجال: $]\alpha;0[$.

2/ إستنتاج إشارة $g(x)$: $g(x)=-x-2+2(x+1)e^x$

من خلال الوضعية النسبية لـ (Γ) و (D) نجد:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II/ 1/ ا/ حساب النهايات:

- $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x(e^x-1)^2=-\infty$

(لأن: $\lim_{x\to-\infty}(e^x-1)^2=1$).

- $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x(e^x-1)^2=+\infty$

(لأن: $\lim_{x\to-\infty}(e^x-1)^2=+\infty$).

ب/ المستقيم المقارب المائل:

لدينا: $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}(x(e^{2x}-2e^x+1)-x)$

$$=\lim_{x\to-\infty}(xe^{2x}-2e^x)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(\tfrac{1}{2}2xe^{2x}-2e^x)=0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ج/ دراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ) :

لذلك ندرس إشارة:

$$f(x)-x=x(e^x-1)^2-x=x\left((e^x-1)^2-1\right)$$

$$=x(e^x-1-1)(e^x-1+1)=\boxed{xe^x(e^x-2)=f(x)-x}$$

وعليه:

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
e^x-2		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن: - (C_f) يقع فوق (Δ) على المجالين: $]-\infty;0[$ و $]\ln 2;+\infty[$.

- (C_f) يقع تحت (Δ) على المجال: $]0;\ln 2[$.
- (C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطتين: $O(0;0)$ و $A(\ln 2;\ln 2)$.

2/ تبيان أن: $x(e^x-1)\ge 0$: لدينا:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	$+$
e^x-1		$-$	0	$+$	
$x(e^x-1)$		$+$	0	$+$	

إذن من أجل كل عدد حقيقي x : $x(e^x-1)\ge 0$.

إتجاه تغير الدالة f :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $\boxed{f'(x)=(e^x-1)^2+2xe^x(e^x-1)}$

بما أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $2e^x(e^x-1)x\ge 0$ وكذلك $(e^x-1)^2\ge 0$ ، فإنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)\ge 0$.

إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

3/ إثبات عبارة المشتق الثاني: لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f''(x)=2e^x(e^x-1)+(2e^x+2xe^x)(e^x-1)+2xe^xe^x$$
$$=2e^x(e^x-1+(1+x)(e^x-1)+xe^x)$$
$$=2e^x(e^x-1+e^x-1+xe^x-x+xe^x)$$
$$=2e^x(-x-2+e^x(2x+2))=\boxed{2e^xg(x)=f''(x)}$$

استنتاج نقاط الإنعطاف: لدينا: $f''(x)=2e^xg(x)$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة $g(x)$ ، وعليه $f''(x)$ تنعدم عند كل من 0 و α وتغير إشارتها في جوارهما، إذن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف فاصلتيهما 0 و α

4/ معادلة المماس (T) :

$(T):\ y=f'(0)(x-0)+f(0)$

وبما أن: $f(0)=0$ و $f'(0)=(1-1)^2+0=0$ فإن: $\boxed{(T):\ y=0}$.

إثبات وحدانية المماس الذي يمر من المبدأ:

لذلك نحل المعادلة: $0=f'(a)(0-a)+f(a)$

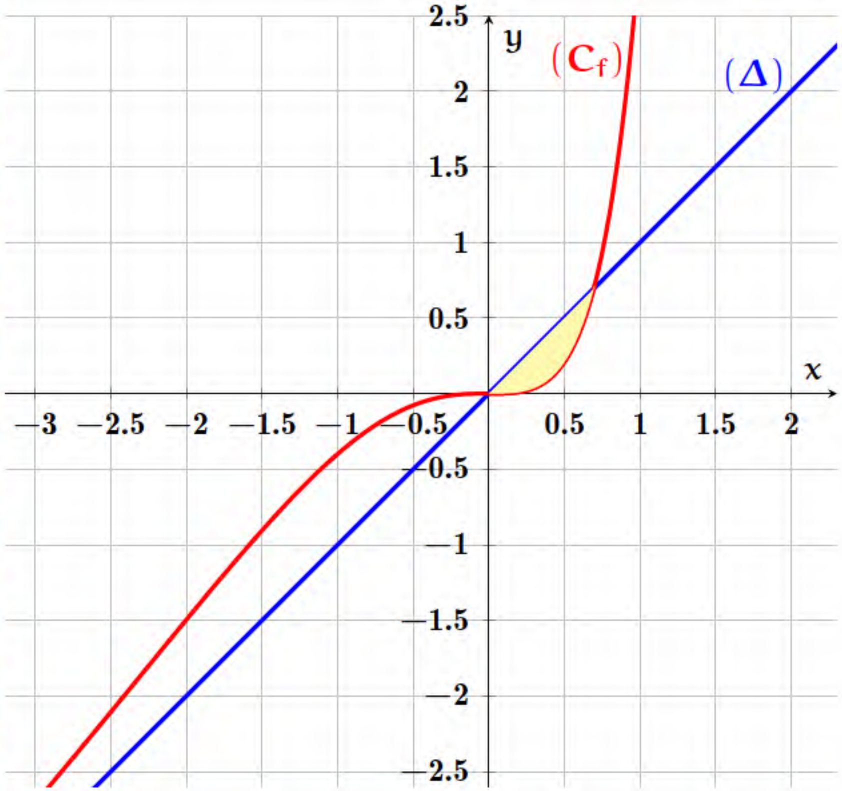
أي المعادلة: $-a[(e^a-1)^2+2a(e^a-1)]+a(e^a-1)^2=0$

تكافئ: $a(e^a-1)(-e^a+1-2a+e^a-1)=0$

تكافئ: $-2a^2(e^a-1)=0$ معناه: $a=0$.

إذن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا يشمل المبدأ هو نفسه المماس (T) .

5/ ا/ الإنشاء:



ب/ تعيين قيم العدد الحقيقي m : بقراءة بيانية:

تقبل المعادلة $f(x) = mx$ ثلاثة حلول مختلفة لما $m \in]0;1[$.

6/ ا/ المكاملة بالتجزئة: لتبيان أن: $\int_0^{\ln 2} xe^x(e^x-2)dx = \frac{5-8\ln 2}{4}$

نعتبر: $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x(e^x-2) \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{1}{2}(e^x-2)^2 \end{cases}$

وبالتالي:

$$\int_0^{\ln 2} xe^x(e^x-2)dx = \left[\frac{1}{2}x(e^x-2)^2\right]_0^{\ln 2} - \frac{1}{2}\int_0^{\ln 2}(e^x-2)^2dx$$
$$= \left(\frac{\ln 2}{2}(e^{\ln 2}-2)^2 - 0\right) - \frac{1}{2}\int_0^{\ln 2}(e^{2x}-4e^x+4)dx$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}-4e^x+4x\right]_0^{\ln 2}$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2\ln 2}-4e^{\ln 2}+4\ln 2-\frac{1}{2}+4\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{4}{2}-4\times 2+4\ln 2-\frac{1}{2}+4\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(-2+4\ln 2-\frac{1}{2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(4-8\ln 2+1)$$

$$\boxed{\int_0^{\ln 2} xe^x(e^x-2)dx = \frac{1}{4}(5-8\ln 2)}$$

ب/ استنتاج المساحة: بما أن المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) على المجال $[0;\ln 2]$ فإن مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) على هذا المجال هي:

$$A = \int_0^{\ln 2}(x-f(x))dx = -\int_0^{\ln 2} xe^x(e^x-2)dx$$
$$= -\frac{1}{4}(5-8\ln 2)\ u.a = \frac{1}{4}(-5+8\ln 2)\times 4\ cm^2$$

$$\boxed{A = -5+8\ln 2\ cm^2}$$

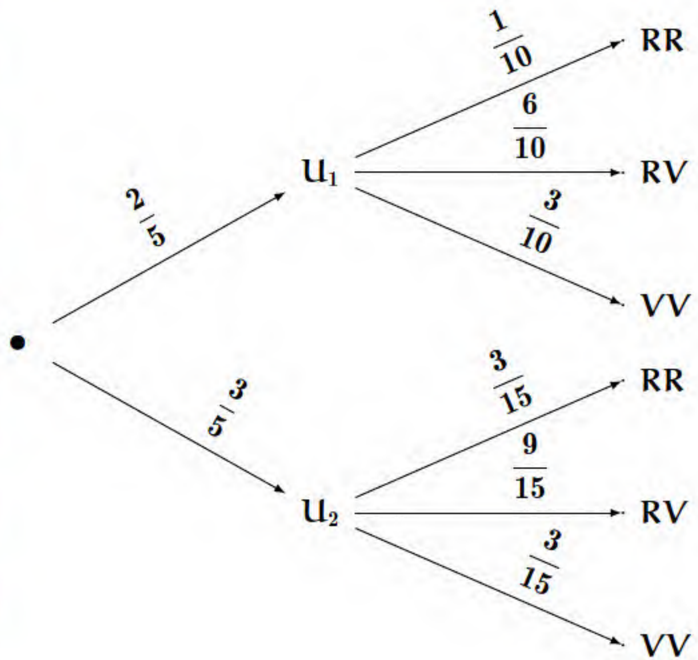
الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

1/ إتمام شجرة الإحتمالات: لدينا:

- $P(U_2) = 1 - P(U_1) = \frac{3}{5}$
- $P_{U_1}(VV) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$ • $P_{U_1}(RV) = \frac{C_3^1.C_2^1}{C_5^2} = \frac{6}{10}$ $\left(= 1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{10}\right)$
- $P_{U_2}(RR) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15}$ • $P_{U_1}(VV) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15}$ $\left(= 1 - \frac{3}{15} - \frac{9}{15}\right)$

وعليه:



2/ حساب إحتمالي الحدثين:

- الحدث A : الأولى حمراء والأخرتين حمراوين، أو الأولى خضراء والأخرتين خضراوين:

$$P(A) = P(U_1)P_{U_1}(RR) + P(U_2)P_{U_2}(VV) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{15}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{4}{25}}$$

- **الحدث** B **:** الأولى حمراء، أو الأولى خضراء والأخرتين واحدة حمراء والأخرى خضراء أو الأولى خضراء والأخرتين حمراوين.

(أو يمكن القول أنه الحدث العكسي لثلاث كريات خضراء-الأولى خضراء والأخرتين خضراوين)

$$P(B) = P(U_1) + P(U_2)\left(P_{U_2}(RV) + P_{U_2}(RR)\right) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\left(\frac{9}{15} + \frac{3}{15}\right)$$

$$\boxed{P(B) = \frac{22}{25}} \qquad \left(P(B) = 1 - \frac{3}{5} \times \frac{3}{15} = 1 - \frac{3}{25} = \frac{22}{25}\right)$$

3/ حساب الإحتمال الشرطي:

$$\bullet P_A(U_2) = \frac{P(U_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{3}{15}}{\frac{4}{25}} = \frac{\frac{3}{25}}{\frac{4}{25}} = \boxed{\frac{3}{4} = P_A(U_2)}$$

4/ ا/ قيم المتغير العشوائي X نلخصها كما يلي:

في حالة سحب الأولى حمراء (حالة سحب كريتين من U_1): نميز ثلاث حالات: إما: $U_1 - RR \to X = 3$ وإما: $U_1 - RV \to X = 2$

وإما: $U_1 - VV \to X = 1$

في حالة سحب الأولى خضراء (حالة سحب كريتين من U_2):

يبقى في الصندوق U_1 كريتان خضراوان، أي: $X = 2$.

إذن قيم المتغير العشوائي X هي: 1 و 2 و 3 .

ب/ قانون إحتمال المتغير العشوائي X :

$\bullet P(X=1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{25}$ $\qquad$ $\bullet P(X=2) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{6}{10} = \frac{21}{25}$

$\bullet P(X=3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{25}$ وعليه:

$X = x_i$	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{25}$	$\frac{21}{25}$	$\frac{1}{25}$

حساب الامل الرياضياتي للمتغير العشوائي X :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i P(X = x_i) = 1 \times \frac{3}{25} + 2 \times \frac{21}{25} + 3 \times \frac{1}{25} = \frac{48}{25}$$

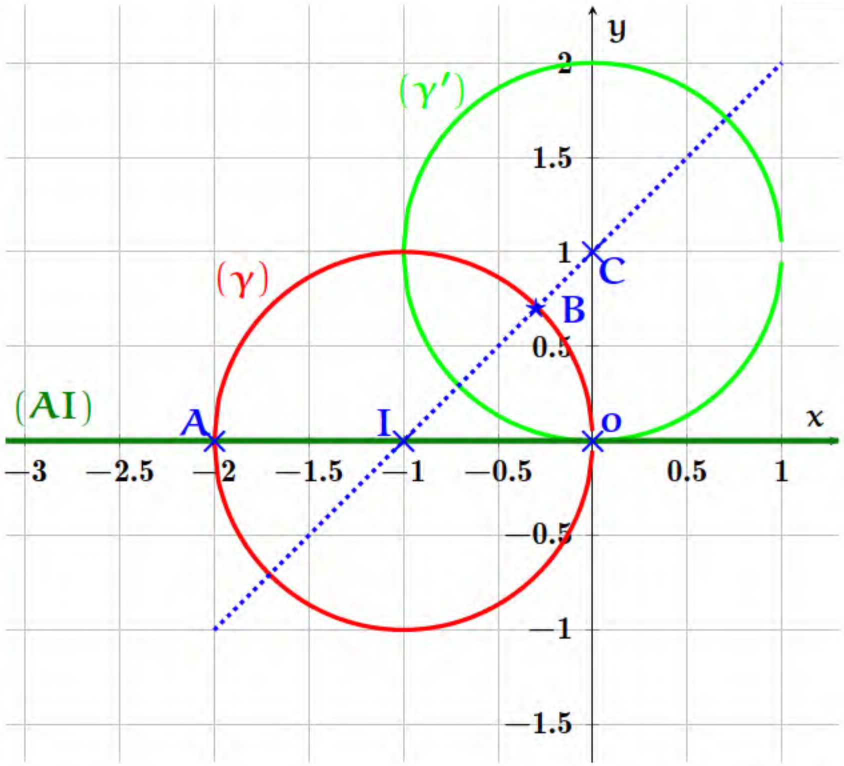
$$\boxed{E(X) = 1.92}$$

ج/ حساب الإحتمال:

$$P(C_3^X = 3) = P([X=1] \cup [X=2]) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{24}{25}$$

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

I/ 1/ الإنشاء:



2/ استنتاج الطويلة وعمدة للعدد $Z_B + 1$:

$\bullet |Z_B + 1| = |Z_B - Z_I| = IB = 1$

$\bullet \arg(Z_B + 1) = \arg(Z_B - Z_I) = \left(\vec{u}; \vec{IB}\right) = \left(\vec{IO}; \vec{IB}\right)$

لدينا الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{IO};\overrightarrow{IB})$ هي زاوية مركزية في الدائرة (γ) ، زاويتها المحيطية هي: $(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB})$ إذن:

$$(\overrightarrow{IO};\overrightarrow{IB}) = 2(\overrightarrow{IO};\overrightarrow{IB}) = 2\times\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

إذن: $\frac{\pi}{4}$ هي عمدةٌ للعدد المركب Z_B+1 .

الشكل الجبري لـ Z_B : لدينا: $Z_B+1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ ومنه:

$$Z_B = -1+\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{-1+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} = Z_B}$$

3/ إثبات أن العدد حقيقي:

$$\bullet\frac{Z_B+1}{i+1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+i} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}{1+i} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

إذن العدد $\frac{Z_B-Z_I}{Z_C-Z_I}$ حقيقي.

الإستنتاج: لدينا العدد $\frac{Z_B-Z_I}{Z_C-Z_I}$ حقيقي موجب معناه:

$$\arg\left(\frac{Z_B-Z_I}{Z_C-Z_I}\right) = 2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

إذن النقط: I و B و C على استقامة واحدة.

II/ 1/ ا/ **الإثبات:**

$$\arg(Z') = \arg\left(\frac{i(Z+2)}{Z+1}\right) = \arg(i)+\arg\left(\frac{Z+2}{Z+1}\right)$$
$$= \frac{\pi}{2}+\arg\left(\frac{Z-Z_A}{Z-Z_I}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2}+(\overrightarrow{MI};\overrightarrow{MA}) = \arg(Z')}$$

ب/ **تعيين مجموعة النقط M بحيث Z' تخيلي صرف:**

Z' تخيلي صرف معناه: $\arg(Z') = \frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

بالتعويض في العلاقة السابقة نجد: $\frac{\pi}{2}+(\overrightarrow{MI};\overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2}+k\pi$

أي: $(\overrightarrow{MI};\overrightarrow{MA}) = k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

إذن مجموعة النقط M في هذه الحالة هي المستقيم (AI) وهو منطبق على حامل محور الفواصل.

2/ ا/ **إثبات العلاقة:**

$$\bullet Z'-i = \frac{i(Z+2)}{Z+1}-i = \frac{i(Z+2)}{Z+1}-\frac{i(Z+1)}{Z+1}$$
$$= \frac{i(Z+2-Z-1)}{Z+1} = \boxed{\frac{i}{Z+1} = Z'-i}$$

ب/ لدينا: $Z = -1+e^{i\theta}$ أي: $Z-Z_I = +e^{i\theta}$ وبالتالي:

$$\begin{cases}|Z-Z_I| = 1\\ \arg(Z-Z_I) = \theta\end{cases}\ \text{معناه:}\ \begin{cases}IM = 1\\ (\overrightarrow{IO};\overrightarrow{IM}) = \theta\end{cases}$$

لما θ تمسح المجال $]-\pi;\pi]$ فإن: M تمسح الدائرة (γ) ، وعندئذ بالتعويض في العلاقة في السؤال السابق نجد:

$$Z'-i = \frac{i}{e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\theta}} = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$$

أي: $\boxed{Z'-Z_C = e^{i\theta'}}$ حيث: $\theta' = \frac{\pi}{2}-\theta$

وذلك معناه: $\begin{cases}|Z'-Z_C| = 1\\ \arg(Z'-Z_C) = \theta'\end{cases}$ أي: $\begin{cases}CM' = 1\\ (\vec{u};\overrightarrow{CM'}) = \theta'\end{cases}$

وبالتالي لما M تمسح الدائرة (γ) أي لما θ تمسح المجال $]-\pi;\pi]$ فإن θ' تمسح المجال $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

وعندئذ النقطة M' تمسح دائرة (γ') مركزها النقطة C ونصف قطرها 1 .

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

1/ ا/ **تعيين باقي القسمة الإقليدية:** لدينا: $2009 = 16(125)+9$ ومنه: $2009\equiv 9\,[16]$ ومنه: $2009^2\equiv 81\,[16]$ أي: $2009^2\equiv 1\,[16]$ إذن باقي قسمة العدد 2009^2 على 16 هو 1 .

ب/ **الإستنتاج:**

لدينا: $2009^2\equiv 1\ [16]$ ومنه: $(2009^2)^{4000}\equiv 1\ [16]$ أي: $2009^{8000}\equiv 1\,[16]$ وبما أن: $2009\equiv 9\,[16]$

فإن: $2009 \times 2009^{8000} \equiv 2009\,[16]$ أي: $\boxed{2009^{8001} \equiv 2009\,[16]}$.

/2 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : \begin{cases} u_0 = 2009^2 - 1 \\ u_{n+1} = (u_n+1)^5 - 1 \end{cases}$

ا/ تبيان أن u_0 يقبل القسمة على 5 :

لدينا: $2009 \equiv 4\,[5]$ أي: $2009 \equiv -1\,[5]$ ومنه: $2009^2 \equiv 1\,[5]$

وبالتالي: $2009^2 - 1 \equiv 0\,[5]$ إذن: u_0 يقبل القسمة على 5 .

ب/ إثبات العلاقة التراجعية:

$$u_{n+1} = (u_n+1)^5 - 1 = -1 + \sum_{p=0}^{5} C_5^p (u_n)^{5-p}(1)^p$$

$$= -1 + C_5^0 u_n^5 + C_5^1 u_n^4 + C_5^2 u_n^3 + C_5^3 u_n^2 + C_5^4 u_n + C_5^5 u_n^0$$

$$= u_n^5 + 5u_n^4 + 10u_n^3 + 10u_n^2 + 5u_n + 1 - 1$$

$$= u_n\left(u_n^4 + 5u_n^3 + 10u_n^2 + 10u_n + 5\right)$$

$$\boxed{u_{n+1} = u_n\left[u_n^4 + 5\left(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1\right)\right]}$$

ج/ البرهان بالتراجع: نسمي الخاصية: "u_n مضاعف لـ 5^{n+1}" : $P(n)$.

ولنثبت صحتها من أجل كل عدد طبيعي n .

- من أجل $n = 0$:

لدينا u_0 يقبل القسمة على 5 أي u_0 مضاعف لـ 5 إذن $P(0)$ صحيحة.

- ليكن n عددا طبيعيا. لنفرض صحة $P(n)$ أي: u_n مضاعف لـ 5^{n+1}

ومنه: u_n^4 مضاعف لـ مضاعف لـ 5^{n+1} أي أنه مضاعف لـ 5 ،

وكذلك $5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)$ مضاعف لـ 5

إذن $u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)$ مضاعف لـ 5

أي: $u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1) = 5k$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$.

ولدينا u_n مضاعف لـ 5^{n+1} معناه: $u_n = 5^{n+1}q$ بحيث $q \in \mathbb{Z}$.

وبالتالي: $u_n[u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)] = 5^{n+1}q5k = 5^{n+2}qk$

معناه: u_{n+1} مضاعف لـ 5^{n+2} ، إذن $P(n+1)$ صحيحة.

نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : u_n مضاعف لـ 5^{n+1} .

/3 **ا/ التحقق:** لدينا: $u_1 = (u_0+1)^5 - 1 = 2009^{10} - 1$

ومنه: $u_2 = (u_1+1)^5 - 1 = 2009^{50} - 1$

إذن: $u_3 = (u_2+1)^5 - 1 = 2009^{250} - 1$

ب/ الإستنتاج:

مما سبق نستنتج أن u_3 مضاعف لـ 5^4 أي أن u_3 مضاعف لـ 625

ومنه: $2009^{250} - 1 \equiv 0\ [625]$ إذن: $\boxed{2009^{250} \equiv 1\,[625]}$

ومنه: $\left(2009^{250}\right)^{32} \equiv 1\ [625]$ أي: $2009^{8000} \equiv 1\ [625]$ إذن:

$$\boxed{2009^{8001} \equiv 2009\,[625]}$$

/4 **ا/ البرهان:**

لتكن a و b و c أعدادا صحيحة غير معدومة، بحيث: a مضاعف لكل من b و c ، و b و c أوليان فيما بينهما.

الطريقة 1:

a مضاعف لـ b معناه: $a = b.k\ ;\ K \in \mathbb{Z}\ \cdots\ (*)$

وبما أن a مضاعف لـ c فإن c يقسم a أي c يقسم $b.k$

وبما أن b و c أوليان فيما بينهما فإن: c يقسم k ، أي $k = c.q\ ;\ q \in \mathbb{Z}$

بالتعويض في $(*)$ نجد: $a = b.c.q$ إذن a مضاعف للجداء bc .

الطريقة 2:

a مضاعف لـ b معناه: b يقسم a ،

و a مضاعف لـ c معناه: c يقسم a ،

ومنه الجداء bc يقسم a لأن b و c أوليان فيما بينهما،

أي: a مضاعف للجداء bc .

ب/ تبيان قابلية قسمة العدد $2009^{8001} - 2009$ على 10000 :

لدينا: $2009^{8001} \equiv 2009\,[16]$ أي: $2009^{8001} - 2009 \equiv 0\,[16]$

إذن العدد $2009^{8001} - 2009$ مضاعف لـ 16 .

ولدينا: $2009^{8001} \equiv 2009\,[625]$ أي: $2009^{8001} - 2009 \equiv 0\,[625]$

إذن العدد $2009^{8001} - 2009$ مضاعف لـ 625 .

ولدينا: $16 = 2^4$ وكذلك: $625 = 5^4$ إذن: $PGCD(16; 625) = 1$ ؛

نستنتج أن العدد $2009^{8001} - 2009$ مضاعف للجداء: $16 \times 625 = 10000$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I/ 1/ دراسة تغيرات الدالة g :

• **النهايات:** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) = 0$

(لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x} = 1$ و $\ln 1 = 0$ ، وكذلك: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1} = 0$)

• $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x) = \lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\left(\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) = +\infty$

(لأن: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{x+1}{x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$ ،

وكذلك: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{1}{x+1} = 1$)

• **إتجاه التغير:** لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{\left(\frac{x+1}{x}\right)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x-x-1}{x^2} \times \frac{x}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-x-1+x}{x(x+1)^2} = \boxed{\frac{-1}{x(x+1)^2} = g'(x)}$$

نلاحظ أن $g'(x) < 0$ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما،

إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

• **جدول التغيرات:**

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘ 0

2/ الإستنتاج: بقراءة جدول التغيرات للدالة g نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $g(x) > 0$

II/ من أجل $x > 0$: $f(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1$ و $f(0) = 1$.

1/ ا/ تبيان النهاية:

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t}\ln(1+t)$

$$= \lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t} = \boxed{1 = \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1\right] = +\infty$.

ب/ تبيان أن $y = x+2$: (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) :

• $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x - 2) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - 1\right] = 0$

إذن المستقيم (Δ) ذو معادلة $y = x+2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

2/ ا/ دراسة قابلية الإشتقاق عن 0 :

• $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + 1 = +\infty$

إذن الدالة غير قابلة للإشتقاق على يمين 0 .

التفسير الهندسي:

المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس موازٍ لحامل محور التراتيب معادلته: $x = 0$.

ب/ تبيان عبارة المشتقة:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$$f'(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x.\frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{\left(\frac{x+1}{x}\right)} + 1$$

$$= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x\left(\frac{x-x-1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right) + 1$$

$$= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} + 1$$

$$\boxed{f'(x) = g(x) + 1}$$

إتجاه التغير:

لدينا مماسبق من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $g(x) > 0$

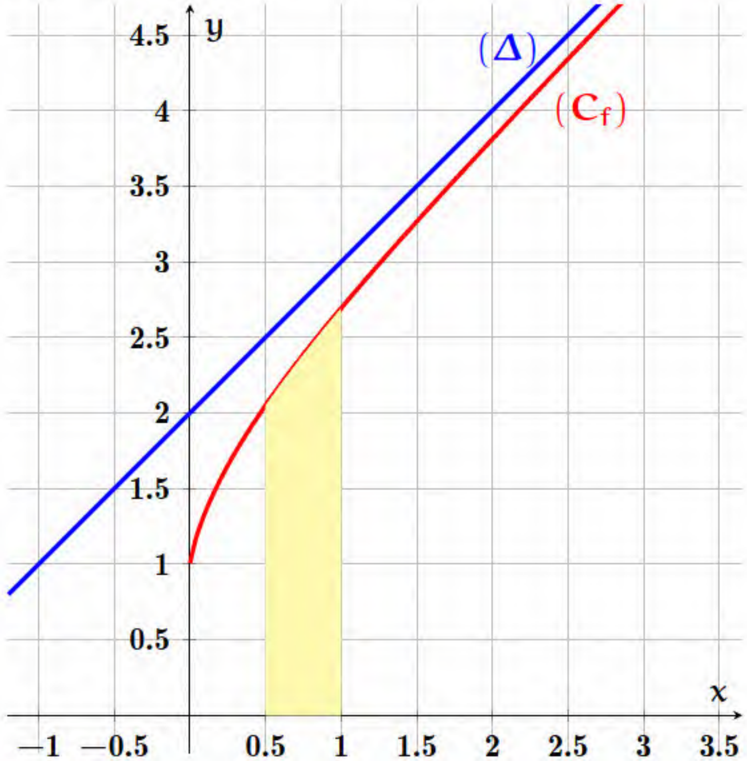
ومنه: $f'(x) > 0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

جدول التغيرات:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$

3/ الإنشاء:

$f(1) = 2 + \ln 2 \approx 2.7$



4/ ا/ تبيان أن الدالة F أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$$F'(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}xf'(x) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right) + 1$$

$$= \frac{1}{2}\left(f(x) + x(g(x)+1) - \frac{1}{x+1} + 2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(f(x) + x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{x}{x+1} + x - \frac{1}{x+1} + 2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(f(x) + x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{x+1}{x+1} + x + 2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(f(x) + x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1\right) = \frac{1}{2}(2f(x))$$

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

إذن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

ب/ استنتاج مساحة الحيز:

مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات: $y = 0$ و $x = \frac{1}{2}$ و $x = 1$ هي:

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx = [F(x)]_{\frac{1}{2}}^{1} = F(1) - F(\frac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{8}\left(9 + \ln\left(\frac{27}{16}\right)\right) u.a = \frac{1}{8}\left(9 + \ln\left(\frac{27}{16}\right)\right) \times 4\ cm^2$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\left(9 + \ln\left(\frac{27}{16}\right)\right)\ cm^2}$$

5/ $n \in \mathbb{N}^*$; $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

ا/ إثبات عبارة الحد العام:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$e^{f(n)-n-1} = e^{n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = e^{\ln\left(1\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = u_n$$

ب/ إثبات أن المتتالية u_n متزايدة تماما:

نعتبر h الدالة المرفقة بعبارة الحد العام للمتتالية (u_n).

الدالة h معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=e^{f(x)-x-1}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$$h'(x)=(f'(x)-1)e^{f(x)-x-1}=g(x)e^{f(x)-x-1}$$

بما أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $g(x)>0$

فإن: $h'(x)>0$ وبالتالي الدالة h متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ؛

إذن: المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$.

ج/ تبيان النهاية:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} e^{f(n)-n-1}=\lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}=e\,.$

(لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=1$) .

الإستنتاج:

نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد e .