الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية غليزان — الثانوية : الشهيد محمد الحسين بن زيان- وادي الجمعة - زروقي بوعبدالله - الشط -

المستوى : الثالثة علوم تجريبية — السنة الدراسية: 2024-2025

امتحان تجريبي فصل الثالث — في مادة الرياضيات — المدة : 3ساعات ونصف

عالج موضوع من الموضوعين

الموضوع 01

التمرين الأول : (04 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x}{ex+1}$

- ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0=\dfrac{5}{4e} \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

- الشكل في الورقة المرفقة يمثل المنحنى (C) للدالة f على المجال $[0;+\infty[$ والمستقيم (D) الذي معادلته $y=x$.

1)أ) مثل على محور الفواصل الحدود ، u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم.

ب) ما تخمينك حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها ؟

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{2}{e}\left(1-\dfrac{1}{eu_n+1}\right)$.

ب)برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>\dfrac{1}{e}$.

ج)بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{eu_n\left(\frac{1}{e}-u_n\right)}{eu_n+1}$.ثم استنتج اتجاه تغيرها و تقاربها .

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\dfrac{eu_n}{eu_n-1}$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدها الأول v_0 .

ب) عبر عن v_n و u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

ج)أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n=\dfrac{1}{(eu_0-1)^2}+\dfrac{1}{(eu_1-1)^2}+\dots+\dfrac{1}{(eu_n-1)^2}$.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

لكل سؤال ثلاث إجابات ، إجابة واحدة منها صحيحة ، المطلوب : تحديد الإجابة الصحيحة مع التبرير

1 - جذور العدد المركب $-i$ هي:

أ $\dfrac{\sqrt2}{2}+i\dfrac{\sqrt2}{2}\,;\,-\dfrac{\sqrt2}{2}-i\dfrac{\sqrt2}{2}$ ب $-\dfrac{\sqrt2}{2}+i\dfrac{\sqrt2}{2}\,;\,\dfrac{\sqrt2}{2}-i\dfrac{\sqrt2}{2}$ جـ $-\dfrac{\sqrt2}{2}+i\dfrac{\sqrt2}{2}\,;\,-\dfrac{\sqrt2}{2}-i\dfrac{\sqrt2}{2}$

2 - h الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=xe^x$. القيمة المتوسطة للدالة h على المجال $[0\,;\,1]$ هي:

أ $\mu=1$ ب $\mu=e-1$ جـ $\mu=0$

3 - تتكون مجموعة أشخاص من 8 رجال و 6 نساء، نريد تكوين 3 أشخاص رئيس و نائب و أمين عام ، عدد اللجان التي تضم رجل و امرأتان المكن التحصل عليها بحيث الرئيس أنثى هو:

أ 360 ب 480 جـ 240

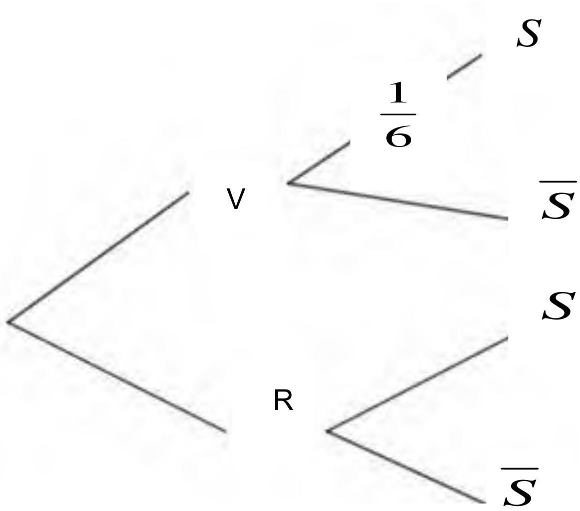
4 - الشكل الأسي لحلول المعادلة $z^2+\sqrt3 z+1=0$ في مجموعة الأعداد المركبة هي

أ $e^{\frac{5\pi}{6}i}\,;e^{\frac{7\pi}{6}i}$ ب $e^{\frac{\pi}{6}i}\,;e^{\frac{7\pi}{6}i}$ جـ $e^{\frac{2\pi}{3}i}\,;e^{\frac{4\pi}{3}i}$

5 - حلول المعادلة التفاضلية $y'+3y+6=0$ و الذي يحقق $y(0)=1$ هو الدالة h حيث:

أ. $h(x)=3e^{-3x}-2$ ب. $h(x)=3e^{-3x}+2$ جـ. $h(x)=-3e^{-3x}+4$

التمرين الثالث: (04 نقاط)



يحتوي صندوق على ثلاثة أزهار نرد متوازنة ، اثنان منها خضراواتان

وفيها ست أوجه مرقمة من 1 إلى 6 وأما الزهر الثالث فلونه أحمر

وفيه وجهان يحملان الرقم 1 و أربعة أوجه تحمل الرقم 6 .

نسحب من الصندوق بصفة عشوائية زهر نرد

ثم نرميه مرة واحدة و نسجل الرقم الظاهر ،

نعتبر الأحداث التالية :

V : زهر النرد المسحوب أخضر ، R : زهر النرد المسحوب أحمر ،

S: الرقم الظاهر هو 6 .

1)أ) أنقل و أكمل شجرة الاحتمالات المقابلة

ب)بعد رمي زهر النرد كان الرقم الظاهر هو 6 ، ما احتمال أن يكون لونه أحمر ؟

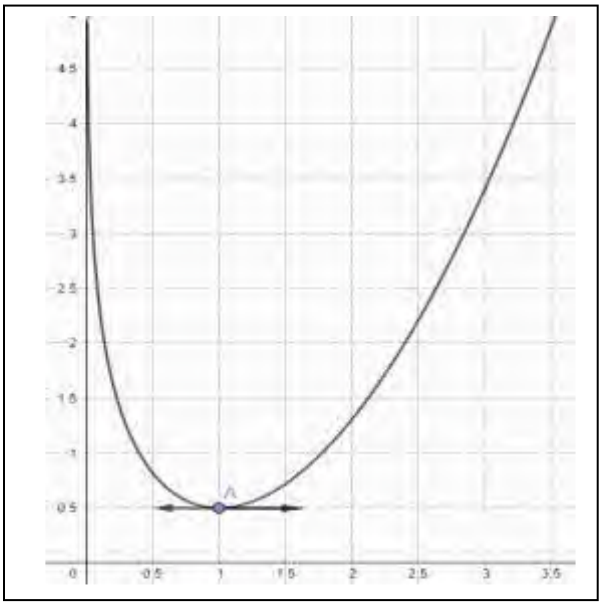
ج)احسب احتمال أن يكون زهر النرد أخضر علما أنه يحمل رقم 1 .

2)ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بـ **-2a** إذا كان الرقم الظاهر 6 و **a** إذا كان عكس ذلك .

أ)عين قيم المتغير العشوائي X.

ب)عرف قانون الاحتمال لـ X ، و أحسب أمله الرياضياتي .

التمرين الرابع: (07 نقاط)



I/ نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=ax^2+b\ln x$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

(D) مماسا لـ (C_g) عند النقطة $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$

1. عين قيمتي a و b.

2. عين اتجاه تغيرات الدالة g واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

نضع $g(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x$

II / نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-2+\frac{2+2\ln x}{x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. عين نهاية الدالة f عند 0 و $+\infty$.

2. ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول التغيرات .

3. أ)أثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) حدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) في المجال $]0;+\infty[$.

د)أثبت أنه توجد نقطة وحيدة B للمنحنى (C_f) يكون المماس (T) عندها موازي للمستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلة (T)

4. أ) برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,5<\alpha<0,6$.

ب)ارسم (C_f) و (Δ) و (T) ($\|\vec{i}\|=2cm$; $\|\vec{j}\|=1cm$)

ج)ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة $(m+1)x-1-\ln x=0$

5.احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيم $(D): y=x-2$ والمستقيمين اللذين معدلتاهما $x=1$ و $x=e$.

6 . نعتبر الدالة h المعرفة على R^* بـ $h(x)=f(x^2)$

أ)اكتب $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$

ب)شكل جدول تغيرات الدالة h .

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع 02

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (U_n) الهندسية حدودها موجبة حيث : $\ln(u_2)-\ln(u_4)=4$ و $\ln(u_1)+\ln(u_5)=-12$

1) بين أن أساس المتتالية (U_n) هو $q=\frac{1}{e^2}$ ثم عين حدها الاول u_0.

2) احسب U_n بدلالة n.

3) أ-احسب المجموع $S_n=U_0+U_1+U_2+..............+U_n$

ب- احسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

4) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $V_n=\ln u_n+\ln u_{n+1}$.

أ - بين أن (V_n) متتالية حسابية يطلب تعين أساسها.

ب - احسب المجموع S'_n حيث: $S'_n=V_0+V_1+V_2+...............+V_n$

ت - هل توجد قيمة n حتى يكون $S'_n=2^{30}$ علل ؟

التمرين الثاني: (05 نقاط)

يحتوي صندوق على خمس كرات بيضاء مرقمة بـ :1 ، 1 ، 1 ، 0 ، 1- وخمس كرات سوداء مرقمة ب:1، 1، 0، 0، 1- لانميز بينها باللمس ، نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات من الصندوق .

I. نعتبر الأحداث التالية :

A : الحصول على كرة بيضاء واحدة فقط B : الحصول على كرية بيضاء على الأقل

C : الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون D : الحصول على اللونين الأبيض و الأسود

F : مجموع أرقام الكرات الثلاث المسحوبة يساوي 0

أحسب إحتمال الأحداث A ، B و C.

1 - بين أن : $P(D)=\frac{5}{6}$ ، $P(F)=\frac{31}{120}$ و $P(C\cap F)=\frac{7}{120}$.

2 - إذا كان مجموع أرقام الكرات المسحوبة يساوي 0 ما هو إحتمال أن تكون الكرات الثلاث من نفس اللون ؟

3 - X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع الأرقام المتحصل عليها

أ)عين قيم المتغير العشوائي X .

ب)عين قانون الاحتمال للمتغير X ، أحسب أمله الرياضياتي .

ج)استنتج $E(2X+1)$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. نضع $z_1=\frac{-3+i}{1+i}$ ، $z_2=i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^3$ و $z_3=-1-2i$

أ. أكتب على الشكل الجبري كل من الأعداد المركبة z_1 ، z_2 .

ب. أحسب طويلة كل من الأعداد z_1 ، z_2 و z_3 .

2. نضع من أجل كل عدد مركب z : $p(z)=z^3+z^2+3z-5$

أ. أحسب $p(1)$.

ب. عين العددين الحقيقيين α و β حيث : $p(z)=(z-1)(z^2+\alpha z+\beta)$

ت. حل في $\mathbb{C}$ ، مجموعة الأعداد المركبة ، المعادلة $p(z)=0$.

3. لتكن النقط A ، B و C التي لواحقها $z_A=-1+2i$ ، $z_B=1$ و $z_C=-1-2i$.

- أنشئ في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ النقط A ، B و C .
- عين لاحقة النقطة D صورة A بواسطة تحاكي مركزه O ونسبته 3 .
- احسب $\dfrac{z_B - z_A}{z_B - z_C}$
- استنتج طبيعة المثلث ABC .
- عين و انشئ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $|z+1-2i| = 3$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I/ نعتبر الدالة g المعرفة على R بـ: $g(x) = xe^x + 1$

- احسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.
- ادرس اتجاه تغيرة الدالة g ثم شكل جدول اشارتها .

II / نعتبر الدالة f المعرفة على R بِـ: $f(x) = x - \ln(xe^x + 1)$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. بين أنه من أجل كل x من R بـ: $f(x) = -\ln\left(x + \dfrac{1}{e^x}\right)$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
2. ا- بين أنه من أجل كل x من R ، $f'(x) = \dfrac{-e^x + 1}{g(x)}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة و شكل جدول تغيراتها .
3. أ)بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

   ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

   ج)بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له .
4. أ) بين أن المنحنى (C) الممثل للدالة $x \mapsto -\ln(x)$ مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$
5. أحسب $f(0)$ ثم أرسم (Δ), (T) و المنحنيين (C) و (C_f) (حيث المنحنى (C_f) يقع فوق (C_f) من أجل $x \in]0;+\infty[$)
6. عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تكون للمعادلة : $f(x) = x + |m|$ حلين مختلفين .
7. نعتبر الدالة k المعرفة على R ب $k(x) = \dfrac{(-1+x^2)e^x + x + 1}{xe^x + 1}$

   أ)بين أنه من أجل كل x من R ، $\displaystyle\int_0^{C_3^2} (k(x) - x)dx = -\ln(3 + e^{-3})$

   ب)استنتج A مساحة الحيز المحدد بالمنحنى $(C_{f'})$ محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما

   $x = 0$ و $x = 3$

   حيث $(C_{f'})$ منحنى الدالة f' .

إنتهى الموضوع الثاني

بالتوفيق في شهادة البكالوريا كلنا أمل في تفوقكم

الحل النموذجي امتحان تجريبي — في مادة الرياضيات — الأستاذة : جلام

الموضوع 01

التمرين الأول : (04 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{2x}{ex+1}$

- دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$

f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$ و f' دالتها المشتقة معرفة بـ:

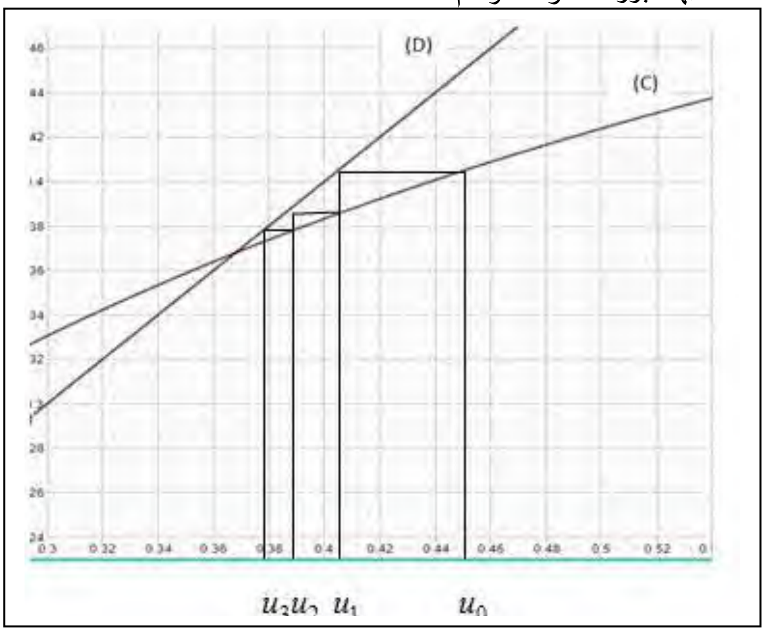
$$f'(x)=\frac{2(ex+1)-e2x}{(ex+1)^2}=\frac{2}{(ex+1)^2}$$

بما أن $f'(x)>0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases}u_0=\frac{5}{4e}\\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$

- الشكل في الورقة المرفقة يمثل المنحنى (C) للدالة f على المجال $[0;+\infty[$ والمستقيم (D) الذي معادلته $y=x$.

1)أ) تمثيل على محور الفواصل الحدود ، u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم.



ب) تخمين حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

بما أن $u_0>u_1>u_2>u_3$ فإن (u_n) متناقصة تماما ومتقاربة نحو نقطة تقاطع (C) و (D) أي $\frac{1}{e}$

2) أ)اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{e}\left(1-\frac{1}{eu_n+1}\right)$

$$\frac{2}{e}\left(1-\frac{1}{eu_n+1}\right)=\frac{2}{e}\left(\frac{eu_n+1-1}{eu_n+1}\right)=\frac{2}{e}\left(\frac{eu_n}{eu_n+1}\right)=\frac{2u_n}{eu_n+1}=u_{n+1}$$

ب)برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>\frac{1}{e}$ ... $p(n)$.

التحقق من صحة $p(n)$ من أجل $n=0$ ومنه $u_0=\frac{5}{4e}>\frac{1}{e}$

ومنه $p(n)$ محققة من أجل $n=0$

نفرض صحة $p(n)$ أي $u_n>\frac{1}{e}$ و نبرهن صحة $p(n+1)$ أي نبرهن أن $u_{n+1}>\frac{1}{e}$

طريقة 1) من فرض $u_n>\frac{1}{e}$ ومنه $eu_n>1$ ومنه $eu_n+1>2$ ومنه $\frac{1}{eu_n+1}<\frac{1}{2}$ ومنه $-\frac{1}{eu_n+1}>-\frac{1}{2}$ ومنه $1-\frac{1}{eu_n+1}>\frac{1}{2}$

ومنه $\frac{2}{e}\left(1-\frac{1}{eu_n+1}\right)>\frac{1}{e}$ أي $u_{n+1}>\frac{1}{e}$

طريقة 2) من فرض $u_n>\frac{1}{e}$ وبما أن f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ فإن $f(u_n)>f\left(\frac{1}{e}\right)$ ومنه $u_{n+1}>\frac{1}{e}$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $u_n>\frac{1}{e}$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n .

ج)اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\frac{eu_n\left(\frac{1}{e}-u_n\right)}{eu_n+1}$.

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{eu_n+1}-u_n=\frac{2u_n-eu_n^2-u_n}{eu_n+1}$$

$$=\frac{u_n-eu_n^2}{eu_n+1}=\frac{eu_n\left(\frac{1}{e}-u_n\right)}{eu_n+1}$$

لدينا $u_n>\frac{1}{e}>0$ ومنه $0>\frac{1}{e}-u_n$ و $eu_n+1>0$ أي $u_{n+1}-u_n<0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ $\frac{1}{e}$ فإنها متقاربة . .

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{eu_n}{eu_n - 1}$

أ) اثبات أن (v_n) متتالية هندسية أساسها2 .

$$v_{n+1} = \frac{eu_{n+1}}{eu_{n+1}-1} = \frac{\frac{e2u_n}{eu_n+1}}{\frac{e2u_n}{eu_n+1}-1} = \frac{\frac{2eu_n}{eu_n+1}}{\frac{2eu_n - eu_n - 1}{eu_n+1}}$$

$$= \frac{2eu_n}{eu_n-1} = 2v_n$$

فإن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ و $v_0 = \frac{eu_0}{eu_0-1} = 5$

ب) عبر v_n عن بدلالة n : $v_n = 5\times 2^n$

u_n بدلالة n لدينا $v_n = \frac{eu_n}{eu_n-1}$ ومنه $v_n(eu_n-1) = eu_n$ ومنه $ev_nu_n - v_n = eu_n$ ومنه $(ev_n - e)u_n = v_n$ ومنه $u_n = \frac{v_n}{ev_n-e}$ إذن $u_n = \frac{5\times2^n}{e5\times 2^n - e}$

حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{5\times 2^n}{e5\times2^n - e}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{5\times2^n}{5\times 2^n\left(e - \frac{e}{5\times2^n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(e-\frac{e}{5\times2^n}\right)} = \frac{1}{e}$$

لأن $\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{5\times 2^n}=0$

ج)أحسب المجموع S_n بدلالة n

نضع $w_n = \frac{1}{(eu_n-1)^2}$ ومنه

$$w_n = \frac{1}{(eu_n-1)^2} = \frac{1}{\left(\frac{ev_n}{ev_n-e}-1\right)^2}$$

$$= \left(\frac{ev_n-e}{e}\right)^2 = (v_n-1)^2 = v_n^2 - 2v_n+1$$

ومنه :

$$S_n = \frac{1}{(eu_0-1)^2} + \frac{1}{(eu_1-1)^2} + \dots + \frac{1}{(eu_n-1)^2}$$

$$= w_0 \quad + w_1 \quad + \dots + w_n$$

$$= \left(v_0^2 - 2v_0+1\right) + \left(v_1^2 - 2v_1+1\right) + \dots \left(v_n^2 - 2v_n+1\right)$$

$$= \left(v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2\right) - 2\left(v_0+v_1+\dots+v_n\right) + 1 + 1 \dots + 1$$

$$= 25\left(\frac{4^{n+1}-1}{4-1}\right) - 10\left(\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\right) + n + 1$$

$$= \frac{25}{3}\left(4^{n+1}-1\right) - 10\left(2^{n+1}-1\right) + n + 1$$

التمرين الثاني :(05 نقاط)

لكل سؤال ثلاث إجابات ، إجابة واحدة منها صحيحة ، المطلوب : تحديد الإجابة الصحيحة مع التبرير

1.جذور العدد المركب $-i$ هي: الاجابة (ب)

التبرير نضع $w^2 = -i$ حيث $w = x + iy$ ومنه

$x^2 - y^2 + 2xyi = -i$ أي تكافئ

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 = 1 & ..(1) \\ 2xy = -1 & ..(2) \end{cases}$$

نحل المعادلة(1) نجد $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

وبتعويض $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ في المعادلة (2) فإن $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

وبتعويض $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ في المعادلة (2) فأن $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه جذور العدد المركب هي $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \ ; \ -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

.2 h الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $h(x) = xe^x$. القيمة المتوسطة للدالة h على المجال $[0\,;1]$ هي:الاجابة أ

التبرير

$v(x) = e^x \quad v'(x) = e^x$

$u'(x) = 1 \quad u(x) = x$

$$\mu = \frac{1}{1-0}\int_0^1 xe^x dx$$

$$= \int_0^1 xe^x dx$$

$$= \left.xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \left.(x-1)e^x\right]_0^1 = 1$$

3.تتكون مجموعة أشخاص من 8 رجال و 6 نساء، نريد تكوين 3 أشخاص رئيس و نائب و أمين عام ، عدد اللجان التي تضم رجل و امرأتان الممكن التحصل عليها بحيث الرئيس أنثى هو:الاجابة ب

التبرير نضع الحادثة A ، عدد اللجان التي تضم رجل و امرأتان الممكن التحصل عليها بحيث الرئيس أنثى

$$|A| = 2A_6^2 \times A_8^1 = 2\times6\times5\times8 = 480$$

4.الشكل الأسي لحلول المعادلة $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$ في مجموعة الأعداد المركبة هي الاجابة أ

نحل المعادلة $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = -1 = i^2$$

:

$$z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{3}+i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{3}-i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

لدينا $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ ومنه $|z_1| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2} = 1$ ومنه

ومنه $\begin{cases}\cos\theta_1=\frac{x}{|z_1|}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_1=\frac{y}{|z_1|}=-\frac{1}{2}\end{cases}$ ومنه $\arg z_1=\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{7\pi}{6}+2k\pi \backslash k\in\mathbb{Z}$

إذن $z_1=e^{\frac{7\pi}{6}i}$

ولدينا $z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ ومنه $|z_2|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$ ومنه

$\begin{cases}\cos\theta_2=\frac{x}{|z_2|}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_2=\frac{y}{|z_2|}=\frac{1}{2}\end{cases}$ ومنه $\arg z_2=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \backslash k\in\mathbb{Z}$

إذن $z_2=e^{\frac{5\pi}{6}i}$

ومنه لشكل الأسي لحلول المعادلة $z^2+\sqrt{3}z+1=0$ في مجموعة الأعداد المركبة هي $e^{\frac{7\pi}{6}i};e^{\frac{5\pi}{6}i}$

5.حلول المعادلة التفاضلية $y'+3y+6=0$ و الذي يحقق $y(0)=1$ الاجابة أ

لدينا $y'+3y+6=0$ ومنه $y'=-3y-6$ ومنه

$$y=ce^{-3x}-\frac{-6}{-3}=ce^{-3x}-2$$

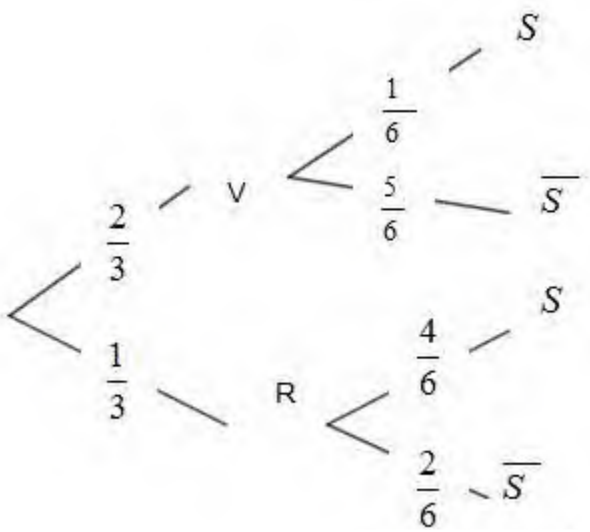
ايجاد c لدينا $y(0)=1$ ومنه $c-2=1$ أي $c=3$

إذن حلول المعادلة التفاضلية $y'+3y+6=0$ و الذي يحقق $y(0)=1$ هو الدالة h حيث $h(x)=3e^{-3x}-2$

التمرين الثالث :(04 نقاط)

نعتبر الأحداث التالية : V : زهر النرد المسحوب أخضر ، R : زهر النرد المسحوب أحمر ، S: الرقم الظاهر هو 6 .

1)أ) الشجرة



ب)بعد رمي زهر النرد كان الرقم الظاهر هو 6 ، حساب احتمال أن يكون لونه أحمر

$$p(S)=\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}+\frac{4}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{6}{18}$$ ومنه

$$p_S(R)=\frac{p(S\cap R)}{p(S)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{4}{6}}{\frac{6}{18}}=\frac{4}{6}$$

ج)حساب احتمال أن يكون زهر النرد أخضر علما أنه يحمل رقم 1 .

$$p(\overline{S})=\frac{5}{6}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{12}{18}$$ ومنه

$$p_{\overline{S}}(V)=\frac{p(V\cap\overline{S})}{p(V)}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{10}{6}}{\frac{12}{18}}=\frac{10}{12}$$

2)ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بـ -2a إذا كان الرقم الظاهر 6 و a إذا كان عكس ذلك .

أ)عين قيم المتغير العشوائي X . $I=\{-2a,a\}$

ب)عرف قانون الاحتمال لـ X ،

$$p(x=-2a)=p(S)=\frac{6}{18}$$

$$p(x=a)=p(\overline{S})=\frac{12}{18}$$

X_i	$-2a$	a
$p(X=X_i)$	$\frac{6}{18}$	$\frac{12}{18}$

حساب أمله الرياضياتي

$$E(X)=\sum_{i=1}^{2}X_i\,p(X=X_i)=\frac{-12a}{18}+\frac{12a}{18}=0$$.

التمرين الرابع :(07 نقاط)

I/ نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي :

$$g(x)=ax^2+b\ln x$$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

(D) مماسا لـ (C_g) عند النقطة $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$

1.تعيين قيمتي a و b.

لدينا (D) مماسا موازيا لمحور الفواصل لـ (C_g) عند النقطة $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$

ومنه $\begin{cases}g(1)=\frac{1}{2}\\ g'(1)=0\end{cases}$ فإن $\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ 2a+b=0\end{cases}$ حيث $g'(x)=2ax+\frac{b}{x}$ ومنه $\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=-1\end{cases}$

2.عين اتجاه تغيرات الدالة g

g متناقصة تماما على $]0;1]$ و متزايدة تماما على $[1;+\infty[$

إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ لدينا $\frac{1}{2}$ قيمة حدية صغرى ومنه

$g(x)\geq\frac{1}{2}$ أي $g(x)>0$ فإن موجبة على $]0;+\infty[$

نضع $g(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x$

II / نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=x-2+\frac{2+2\ln x}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. عين نهاية الدالة f عند 0 و $+\infty$.

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x-2+\frac{2+2\ln x}{x}\right)=-\infty$$ لأن

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}(2+2\ln x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-2+\frac{2}{x}+\frac{2\ln x}{x}\right)=+\infty$$ لأنّ :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty\end{cases}$$

2. ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول التغيرات.

f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و f' دالتها المشتقة

- **لدينا :** $f'(x)=1+\left[\dfrac{\frac{2}{x}\times x-(2+2\ln x)}{x^2}\right]$ اي

$$=1+\left[\frac{2-(2+2\ln x)}{x^2}\right]=\frac{x^2-2\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{2\left(\frac{1}{2}x^2-\ln x\right)}{x^2}=\frac{2g(x)}{x^2}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f : بما أنّ $g(x)>0$ فإنّ $f'(x)>0$

بما أن $f'(x)>0$ فإن f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

- **جدول تغيرات الدالة f :**

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3.أ)أثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

- لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2+2\ln x}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{2\ln x}{x}\right)$$ إذن

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]==0$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) في المجال $]0;+\infty[$

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$. $f(x)-y=\dfrac{2+2\ln x}{x}$

- **جدول إشارة الفرق :**

$f(x)-y=0$ معناه $(2+2\ln x)=0$ ومنه $1+\ln x=0$ أي

$\ln x=-1$ وبالتالي $x=e^{-1}$

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$1+\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)-y$	‖	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	

د)أثبات أنه توجد نقطة وحيدة B للمنحنى (C_f) يكون المماس (T) عندها موازي للمستقيم (Δ)

المماس (T) عندها موازي للمستقيم (Δ) معناه $f'(x)=1$ ومنه

$\dfrac{x^2-2\ln x}{x^2}=1$ ومنه $x=1$ معادلة (T) هي

$(T)\ :\ y=f'(x)(x-1)+f(1)$

$y=x$

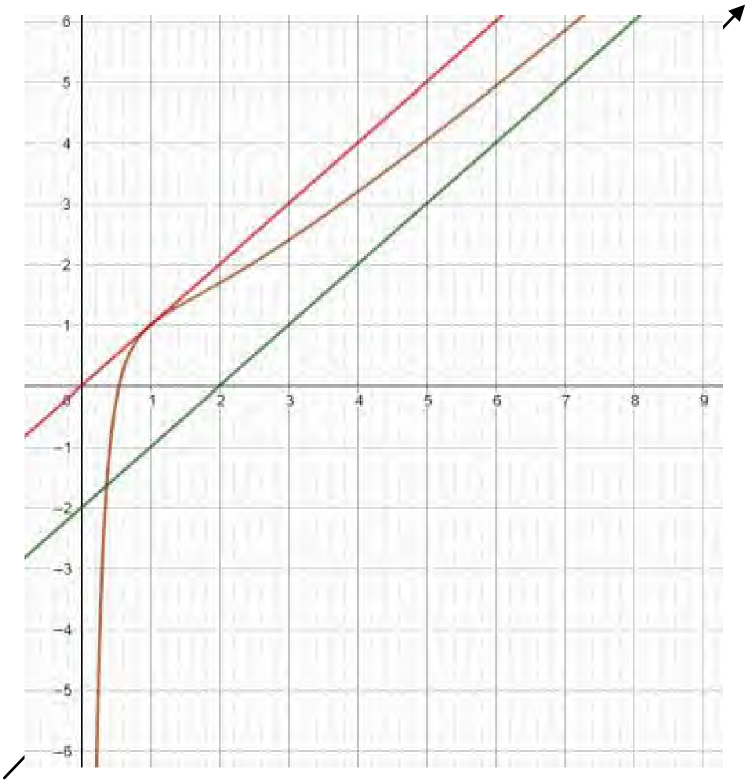
3. أ) برهان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,5<\alpha<0,6$.

تبيان أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.5<\alpha<0.6$:

- لدينا f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[0.5;0.6]$
- ولدينا : $f(0.5)\times f(0.6)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.5<\alpha<0.6$

ب)رسم (C_f) و (Δ) و (T) $(\|\vec{i}\|=2cm\ ;\ \|\vec{j}\|=1cm)$



ج)مناقشة بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة

$(m+1)x-1-\ln x=0$

$(m+1)x-1-\ln x=0$ معناه $mx+x-1-\ln x=0$ ومنه

$-x+1+\ln x=mx$ ومنه $-2x+2+2\ln x=2mx$ ومنه

$-2+\dfrac{2+2\ln x}{x}=2m$ ومنه $x-2+\dfrac{2+2\ln x}{x}=x+2m$ أي

$f(x)=x+2m$

حلول المعادلة $f(x)=x+2m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع

المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y_m=x+2m$

العدد	m	$2m$
حل وحيد	$]-\infty;-1]$	$]-\infty;-2]$
حلين مختلفين	$]-1;0[$	$]-2;0[$
حل وحيد	0	0
لا يوجد حل	$]0;+\infty[$	$]0;+\infty[$

5. احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) والمستقيم $(D): y=x-2$ والمستقيمين اللذين معدلتاهما $x=1$ و $x=e$.

$$A=\int_1^e |f(x)-y|dx\,\|\vec{i}\|\|\vec{j}\|$$

$$=\int_1^e\left(\frac{2+2\ln x}{x}\right)dx\,\|\vec{i}\|\|\vec{j}\|$$

$$=\int_1^e\left(\frac{2}{x}+\frac{2+2\ln x}{x}\right)dx\,\|\vec{i}\|\|\vec{j}\|$$

$$=\left[2\ln|x|+(\ln|x|)^2\right]_1^e\|\vec{i}\|\|\vec{j}\|=6cm^2$$

6 . نعتبر الدالة h المعرفة على R^* بـ $h(x)=f(x^2)$

أ) $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$

$h'(x)=2xf'(x^2)$

- النهايات

$\lim\limits_{x\to0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x^2)=-\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}(x^2)=0^+\\ \lim\limits_{X\to0^+} f(X)=-\infty\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to0^-} h(x)=\lim\limits_{x\to0^-} f(x^2)=-\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^-}(x^2)=0^+\\ \lim\limits_{X\to0^+} f(X)=-\infty\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x^2)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty} f(X)=+\infty\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x^2)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty} f(X)=+\infty\end{cases}$

- دراسة اتجاه تغير الدالة

لدينا $f'(X)>0$ من أجل $X>0$

أي لدينا $f'(x^2)>0$ من أجل $x^2>0$ اي

$x\in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

ومنه أشارة $h'(x)$ من أشارة x

أي من أجل $x\in]0;+\infty[$ فإن $h'(x)>0$ ومنه h متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

و من أجل $x\in]-\infty;0[$ فإن $h'(x)<0$ ومنه h متناقصة تماما على $]-\infty;0[$

ب) جدول تغيرات الدالة h .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	$\|\|$	$+$
$h(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	$\|\|$	$-\infty \nearrow +\infty$

الموضوع 02

التمرين الأول : (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (U_n) الهندسية حدودها موجبة حيث :

$$\begin{cases} \ln(u_2)-\ln(u_4)=4 \quad ....(1) \\ \ln(u_1)+\ln(u_5)=-12....(2) \end{cases}$$

1.اثبات أن أساس المتتالية (U_n) هو $q=\frac{1}{e^2}$

لدينا $u_4=u_2q^2$ وبتعويض في المعادلة (1) نجد

$\ln(u_2)-\ln(u_2q^2)=4$ أي $\ln\left(\frac{u_2}{u_2q^2}\right)=4$ ومنه $\ln\left(\frac{1}{q^2}\right)=4$ أي

$\frac{1}{q^2}=e^4$ ومنه $q^2=\frac{1}{e^4}$ ومنه $q=\frac{1}{e^2}$ أو $q=-\frac{1}{e^2}$ مرفوض لأن (U_n)

حدودها موجبة ومنه $q=\frac{1}{e^2}$

تعيين حدها u_0

لدينا $u_5=u_0q^5$ و $u_1=u_0q$ بتعويض في المعادلة (2) نجد

$\ln(u_0q)+\ln(u_0q^5)=-12$ ومنه $\ln(u_0^2q^6)=-12$ ومنه

$u_0^2q^6=e^{-12}$ ومنه $u_0^2e^{-12}=e^{-12}$ ومنه $u_0^2=1$ أي $u_0=1$ أو $u_0=-1$

مرفوض لأن (U_n) حدودها موجبة ومنه $u_0=1$

2.احسب U_n بدلالة n.

$$u_n=u_0q^n=e^{-2n}$$

3.أ-احسب المجموع $S_n=U_0+U_1+U_2+..............+U_n$

$$S_n=u_0\left(\frac{1-(q)^{n+1}}{1-q}\right)=\left(\frac{1-\left(e^{-2}\right)^{n+1}}{1-e^{-2}}\right)$$

ب- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-\left(e^{-2}\right)^{n+1}}{1-e^{-2}}\right)=\frac{1}{1-e^{-2}}$$ لأن

$$0<e^{-2}<1\ ;\ \lim_{n\to+\infty}\left(e^{-2}\right)^{n+1}=0$$

4. لتكن المتتالية (V_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ:

$V_n=\ln u_n+\ln u_{n+1}$.

أ - بين أن (V_n) متتالية حسابية يطلب تعين أساسها.

$$v_{n+1}-v_n=\ln u_{n+1}+\ln u_{n+2}-\left(\ln u_n+\ln u_{n+1}\right)$$
$$=\ln u_{n+2}-\ln u_n=\ln\left(e^{-2(n+2)}\right)-\ln e^{-2n}$$
$$=-2n-4+2n=-4$$

ومنه (V_n) متتالية حسابية و $r=-4$ و $v_0=\ln u_0+\ln u_1=-2$

ب - احسب المجموع S'_n حيث:

$$S'_n=V_0+V_1+V_2+...............+V_n$$

$$S'_n=\frac{n+1}{2}(v_0+v_n)=\frac{n+1}{2}(-2-4n-2)=-2(n+1)^2$$

لا توجد قيمة لـ n بحيث $S'_n=2^{30}$ لأن $S'_n<0$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

يحتوي صندوق على خمس كرات بيضاء مرقمة بـ :1 ، 1 ، 1 ، 0 ، 1- وخمس كرات سوداء مرقمة بـ:1، 1، 0، 0، 1- لانميز بينها باللمس ، نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات من الصندوق .

حساب إحتمال الأحداث A ، B و C.

$$|\Omega|=C_{10}^3=\frac{10!}{3!7!}=120$$

A : الحصول على كرة بيضاء واحدة فقط $A=\{(B,N,N)\}$

$$p(A)=\frac{C_5^1C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$$

B : الحصول على كرية بيضاء على الأقل

$$B=\{(B,N,N);(B,B,N);(B,B,B)\}$$

$$p(B)=\frac{C_5^1C_5^2+C_5^2C_5^1+C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{110}{120}=\frac{11}{12}$$

C : الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون

$$C=\{(N,N,N);(B,B,B)\}$$

$$p(C)=\frac{C_5^3+C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$$

D : الحصول على اللونين الأبيض و الأسود

$$D=\{(B,N,N);(B,B,N)\}$$

ط1 $p(D)=\frac{C_5^1C_5^2+C_5^1C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{100}{120}=\frac{5}{6}$

ط2 $p(D)=1-p(C)=\frac{5}{6}$

F : مجموع أرقام الكرات الثلاث المسحوبة يساوي 0

$$F=\{(0,0,0);(-1,0,1)\}$$

$$p(F)=\frac{C_3^3+C_2^1C_3^1C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{31}{120}$$

$C\cap F$ مجموع الكرات المسحوبة معدوم و في من نفس لون

$$C\cap F=\{(B_0,B_1,B_{-1});(N_0,N_1,N_{-1})\}$$

$$p(C\cap F)=\frac{C_1^1C_3^1C_1^1+C_1^1C_2^1C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{120}$$

.

حساب إحتمال أن تكون الكرات الثلاث من نفس اللون علما أن مجموع أرقام الكرات المسحوبة يساوي 0 $p_F(C)$

$$p_F(C)=\frac{p(C\cap F)}{p(F)}=\frac{\frac{7}{120}}{\frac{31}{120}}=\frac{7}{31}$$

X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع الأرقام المتحصل عليها

قيم و قانون المتغير العشوائي X .

$$I=\{-2,-1,0,1,2,3\}$$

$\{(-1,-1,0)\} \longleftarrow x=-2 \longleftarrow$ $p(x=-2)=\dfrac{C_2^2C_3^1}{C_{10}^3}=\dfrac{3}{120}$

$\{(-1,0,0)(-1,-1,1)\} \longleftarrow x=-1 \longleftarrow$ $p(x=-1)=\dfrac{C_2^1C_3^2+C_2^2C_5^1}{C_{10}^3}=\dfrac{11}{120}$

$\{(0,0,0)(-1,0,1)\} \longleftarrow x=0 \longleftarrow$ $p(x=0)=p(F)=\dfrac{31}{120}$

$\{(1,0,0)(-1,1,1)\} \longleftarrow x=1 \longleftarrow$ $p(x=1)=\dfrac{C_5^1C_3^2+C_5^2C_2^1}{C_{10}^3}=\dfrac{35}{120}$

$\{(1,1,0)\} \longleftarrow x=2 \longleftarrow$ $p(x=2)=\dfrac{C_3^1C_5^2}{C_{10}^3}=\dfrac{30}{120}$

$\{(1,1,1)\} \longleftarrow x=3 \longleftarrow$ $p(x=3)=\dfrac{C_5^3}{C_{10}^3}=\dfrac{10}{120}$

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$p(x=x_i)$	$\frac{3}{120}$	$\frac{11}{120}$	$\frac{31}{120}$	$\frac{35}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{10}{120}$

أحسب أمله الرياضياتي .

$$E(X)=\sum_{i=1}^{6}x_i p(x=x_i)=\frac{9}{10}$$

$$E(2X+1)=2E(X)+1=\frac{14}{5}$$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

المستوى المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.نضع $z_1=\dfrac{-3+i}{1+i}$ ، $z_2=i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)^3$ و $z_3=-1-2i$

أ. الشكل الجبري للأعداد المركبة z_1 ، z_2 .

$$z_1=\frac{(-3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-3+3i+i+1}{1+1}=\frac{-2+4i}{2}=-1+2i$$

$$z_2=i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^3$$

$$=i\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3+3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(-\frac{i}{2}\right)+3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{i}{2}\right)^2+\left(-\frac{i}{2}\right)^3\right)$$

$$=i\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{9i}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{i}{8}\right)=i(-i)=1$$

ب. حساب طويلة الأعداد z_1 ، z_2 و z_3 .

$$|z_1|=|-1+2i|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$$

$$|z_2|=|1|=1$$

$$|z_3|=|-1-2i|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$$

2. نضع من أجل كل عدد مركب z : $p(z)=z^3+z^2+3z-5$

أ. حساب $p(1)$. $p(1)=1$

ب. عين العددين الحقيقيين α و β حيث :

$$p(z)=(z-1)(z^2+\alpha z+\beta)$$

$(z-1)(z^2+\alpha z+\beta)$

لدينا $=z^3+z^2(\alpha-1)+z(\beta-\alpha)-\beta$ ومنه بالمطابقة

$=p(z)$

نجد $\alpha=2$ و $\beta=5$

ج. حل في $\mathbb{C}$ ، مجموعة الأعداد المركبة ، المعادلة $p(z)=0$.

$p(z)=0$ ومنه $(z-1)(z^2+2z+5)=0$

$z^2+2z+5=0$ أو $z-1=0$ ومنه مجموعة حلول المعادلة

$p(z)=0$ هي $\{-1+2i,-1-2i,1\}$

3.لتكن النقط A ، B و C التي لواحقها $z_A=-1+2i$ ، $z_B=1$ و $z_C=-1-2i$.

- أنشئ في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ النقط A ، B و C .
- النقطة D صورة A بواسطة تحاكي مركزه O ونسبته 3 .

$z_D-z_o=3(z_A-z_o)$ معناه $z_D=3z_A=3(-1+2i)=-3+6i$

ومنه $D(3;6)$

- احسب $\dfrac{z_B-z_A}{z_B-z_C}$

$$\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}=\frac{1-(-1+2i)}{1-(-1-2i)}=\frac{(2-2i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)}=-i$$

- استنتج طبيعة المثلث ABC .

لدينا $\left|\dfrac{z_B-z_A}{z_B-z_C}\right|=|-i|=1$ أي $AB=BC$ ومنه ABC مثلث متساوي الساقين (1)

ولدينا $\arg\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_B-z_C}\right)=\arg(-i)=-\dfrac{\pi}{2}$ أي

$\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AB}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ ومنه المثلث ABC قائم (2)

من (1) و (2) نستنتج أن ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين في A .

- تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق :

$|z+1-2i|=3$.

$|z+1-2i|=3$ معناه $|z-(-1+2i)|=3$ ومنه

$|z-z_A|=3$ ومنه $AM=3$

ومنه مجموعة النقط هي دائرة مركزها A و نصف قطرها $r=3$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I/ نعتبر الدالة g المعرفة على R بـ: $g(x)=xe^x+1$

- حساب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} xe^x+1=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} xe^x+1=1$$ لأن $\left\{\lim_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)=0\right.$

- دراسة اتجاه تغير الدالة g

g دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على R و g' دالتها المشتقة معرفة بـ

$$g'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$$

$g'(x)=0$ معناه $x=0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

أي من أجل $x\in]-1;+\infty[$ فإن $g'(x)>0$ ومنه g متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$

و من أجل $x\in]-\infty;-1]$ فإن $g'(x)<0$ ومنه g متناقصة تماما على $]-\infty;-1]$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	1 ↘	$g(-1)$	↗ $+\infty$

بما أن $g(-1)$ قيمة حدية صغرى فإن $g(x)\geq g(-1)$ ومنه $g(x)>0$ موجبة تماما على R

II/ نعتبر الدالة f المعرفة على R بـ: $f(x)=x-\ln\left(xe^x+1\right)$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. اثبات أنه من أجل كل x من R بـ: $f(x)=-\ln\left(x+\frac{1}{e^x}\right)$

$$-\ln\left(x+\frac{1}{e^x}\right)=-\ln\left(\frac{xe^x+1}{e^x}\right)$$
$$=-\left[\ln\left(xe^x+1\right)-\ln\left(e^x\right)\right]$$
$$=-\ln\left(xe^x+1\right)+x=f(x)$$

حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

لأن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} -\ln\left(x+\frac{1}{e^x}\right)=-\infty$

$$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{e^x}\right)=+\infty\\ \lim_{X\to+\infty} -\ln(X)=-\infty\end{cases}$$

لأن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\ln\left(xe^x+1\right)\right)=-\infty$

$$\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}(x)=-\infty\\ \lim_{x\to-\infty}\left(xe^x+1\right)=1\\ \lim_{X\to1}\ln(X)=0\end{cases}$$

2.أ- اثبات أنه من كل x من R ، $f'(x)=\frac{-e^x+1}{g(x)}$

f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على R و f' دالتها المشتقة معرفة بـ

$$f'(x)=1-\frac{\left(xe^x+1\right)'}{xe^x+1}=\frac{xe^x+1-e^x-xe^x}{xe^x+1}$$
$$=\frac{1-e^x}{xe^x+1}=\frac{1-e^x}{g(x)}$$

إشارة $f'(x)$ من اشارة $1-e^x$ لأن $g(x)>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

أي من أجل $x\in]0;+\infty[$ فإن $f'(x)<0$ ومنه f متناقصة تماما على $]0;+\infty[$

و من أجل $x\in]-\infty;0]$ فإن $f'(x)>0$ ومنه g متزايدة تماما على $]-\infty;0]$

جدول تغيراتها .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↘ $+\infty$

3.أ)اثبات أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

لأن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\ln\left(xe^x+1\right)-x\right)=0$

$$\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}\left(xe^x+1\right)=1\\ \lim_{X\to1}\ln(X)=0\end{cases}$$

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم .

$-\ln\left(xe^x+1\right)=0$ ومنه $xe^x+1=1$ ومنه $xe^x=0$ أي $x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-x$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

ج) اثبات أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ)

$f'(x)=1$ معناه $\frac{1-e^x}{xe^x+1}-1=0$ ومنه $\frac{1-e^x-xe^x-1}{xe^x+1}=0$ ومنه

$\frac{(-1-x)e^x}{xe^x+1}=0$ ومنه $-1-x=0$ معناه $x=-1$

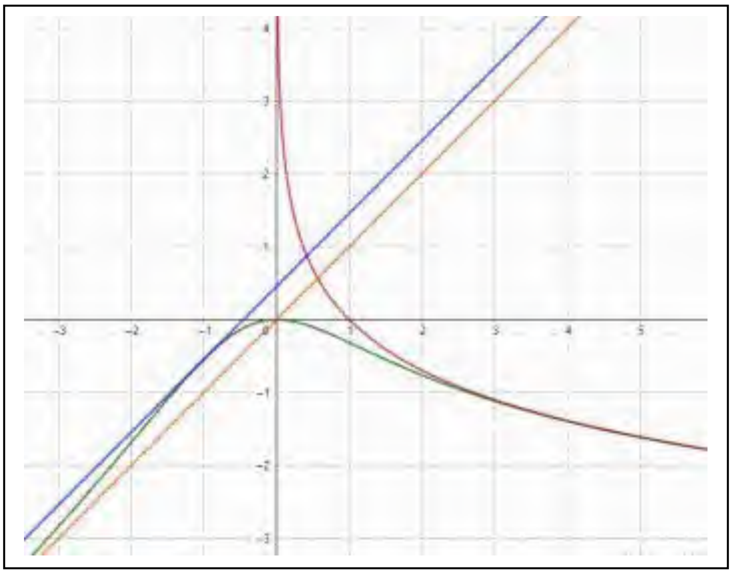
$$(T): y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$$
$$y=x+1-\ln(-1+e)$$

4.أ) اثبات أن المنحنى (C) الممثل للدالة $x \mapsto -\ln(x)$ مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+\ln x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\ln x-\ln\left(\frac{xe^x+1}{e^x}\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{xe^x}{xe^x+1}\right)\right)=0$$

5. $f(0)=0$ ثم أرسم (Δ), (T) و المنحنيين (C) و (C_f)



6.تعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تكون للمعادلة : $f(x)=x+|m|$ حلين مختلفين .

المعادلة : $f(x)=x+|m|$ حلين مختلفين من أجل $|m|<1-\ln(-1+e)$ أي $]-1+\ln(-1+e);1-\ln(-1+e)[$

7. نعتبر الدالة k المعرفة على R بـ $k(x)=\dfrac{(-1+x^2)e^x+x+1}{xe^x+1}$

أ)اثبات أنه من أجل كل x من R ، $\int_0^{C_3^2}\left(k(x)-x\right)dx=-\ln\left(3+e^{-3}\right)$

$$\int_0^{C_3^2}\left(k(x)-x\right)dx=\int_0^3\left(\frac{(-1+x^2)e^x+x+1-xe^x-1}{xe^x+1}\right)dx$$

$$=\int_0^3 f'(x)dx=\left[f(x)\right]_0^3=-\ln\left(3+e^{-3}\right)$$

ب)ستنتاج A مساحة الحيز المحدد بالمنحنى $(C_{f'})$ محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=3$

$$\int_0^3\left|f'(x)\right|dx=-\int_0^3 f'(x)dx=-\left[f(x)\right]_0^3=\ln\left(3+e^{-3}\right)$$