على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

## الموضـــــــــوع الأول

### التمرين الأول: 05 نقاط

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)$ و $(v_n)$ المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = e+1 \\ u_{n+1} = e+1-\dfrac{e}{u_n} \end{cases}$ و $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n-1}{u_n-e}\right)$.

1. أ) برهن بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n > e$.
   ب) بين أن $(u_n)$ متناقصة تماما و برر تقاربها.
2. أ) بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_{n+1} - e < e^{-1}(u_n - e)$.
   ب) استنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n - e < e^{-n}$، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
3. أ) بين أن $(v_n)$ متتالية حسابية أساسها 1 يطلب حساب حدها الأول.
   ب) اكتب $v_n$ بدلالة $n$، ثم استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$.
4. نعتبر المجموع $S_n$ بحيث: $S_n = \dfrac{e-1}{u_0-1} + \dfrac{e-1}{u_1-1} + \dots + \dfrac{e-1}{u_n-1}$.
   ✓ تحقق أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{e-1}{u_n-1} = 1 - \dfrac{1}{e^{v_n}}$. ثم استنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $S_n = n+1+\dfrac{e^{-n-1}-1}{e-1}$.

### التمرين الثاني: 04 نقاط

يحتوي كيس على أربع كريات حمراء مرقمة بـ: $-a,a,a,0$ و ثلاث كريات بيضاء مرقمة بـ: $-a,0,0$ و كرية خضراء مرقمة بـ: $0$ بحيث $a \in \mathbb{Z}^*$ و الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس.

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات و نعتبر الحادثتين: $A$: الحصول على ثلاث كريات مختلفة اللون مثنى مثنى.

$B$: الحصول على ثلاث كريات مجموع أرقامها معدوم.

1. أ) احسب كلا من $P(A)$ و $P(B)$.
   ب) بين أن $P(A\cap B) = \dfrac{1}{14}$، ثم استنتج $P(A\cup B)$.
2. نعتبر المتغير العشوائي $X$ الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب مجموع أرقام الكريات المسحوبة.
   أ) برر أن مجموعة قيم المتغير العشوائي $X$ هي: $\{-2a;-a;0;a;2a\}$، ثم عرف قانون احتماله.
   ب) احسب كلا من الأمل الرياضياتي $E(X)$ و $V(X)$.
   ج) عين قيم العدد الصحيح $a$ التي من أجلها يكون $V(14X) = A_7^3$.

## التمرين الثالث: 04 نقاط

نعتبر المعادلة $11x-17y=1......(E)$ بحيث $x$ و $y$ عددان صحيحان.

1. أ) عين الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة $(E)$ والذي يحقق $y_0-x_0=1$.
   ب) بين أن مجموعة حلول المعادلة $(E)$ هي: $\{(17k+14;11k+9);k\in\mathbb{Z}\}$.
2. أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الاقليدية للعدد $5^n$ على العدد $11$.
   ب) بين أن $\beta\equiv 3[11]$ بحيث $\beta=2018^{2x+y}$.
   ج) عين قيم العدد الطبيعي $n$ التي من أجلها يكون $(4\beta+4)^{2024}\times 5^n-3\equiv 0[11]$.
3. العدد الطبيعي $N$ يكتب $\overline{\lambda 5}$ في النظام ذي الأساس $a$ و $\overline{\gamma 6}$ في النظام ذي الأساس $b$ بحيث $\lambda=11$ و $\gamma=17$.
   ✓ عين العددين $a$ و $b$ علما أن $|a-b|\leq 11$، ثم اكتب $N$ في النظام العشري.

## التمرين الرابع: 07 نقاط

**الجزء الأول:** نعتبر الدالة $g$ المعرفة والمتزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ بحيث: $g(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x-1}{x+1}$.

✓ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ بحيث $0,44<\alpha<0,46$، ثم استنتج حسب قيم $x$ اشارة $g(x)$.

**الجزء الثاني:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x\ln(x^2+1)-x$ وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$ بحيث $\|\vec{i}\|=2cm$.

1. بين أن الدالة $f$ فردية و أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$، ثم استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.
2. أ) بين أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x^2)$.
   ب) بين أن الدالة $f$ متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-\sqrt{\alpha}]$ و $[\sqrt{\alpha};+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[-\sqrt{\alpha};\sqrt{\alpha}]$.
   ج) شكل جدول تغيرات الدالة $f$.
3. اكتب معادلة للمماس $(T)$ لـ $(C_f)$ في مبدأ المعلم. ثم ادرس الوضع النسبي لـ $(C_f)$ و $(T)$ وفسر النتيجة هندسيا.
4. أ) عين احداثيات نقط تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل.
   ب) انشئ $(T)$ ثم ارسم $(C_f)$ على المجال $[-\sqrt{e-1};\sqrt{e-1}]$، يعطى $f(\sqrt{\alpha})\simeq -0,42$.
   ج) ارسم $(C_{-f})$ التمثيل البياني للدالة $-f$، موضحا طريقة رسمه انطلاقا من $(C_f)$.
5. أ) بين أن الدالة $F$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x)=\dfrac{1}{2}\left((x^2+1)\ln(x^2+1)-2x^2\right)$ دالة أصلية لـ $f$ على $\mathbb{R}$.
   ب) لتكن $A(\alpha)$ مساحة الحيز المحدد بـ: $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها: $y=0$، $x=\sqrt{\alpha}$ و $x=-\sqrt{\alpha}$.
   ✓ بين أن $A(\alpha)=4(3\alpha-1)cm^2$.

**انتهـــــــــى الموضوع الأول**

## الموضـــــوع الثانـــــــي

### التمرين الأول: 04 نقاط

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)$ و $(v_n)$ المعرفتين على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \ln(n) \end{cases}$ و $v_n = e^{u_n}$.

1. أ) ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$.
   ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$: $u_n = \ln\left[(n-1)!\right]$،
2. استنتج عبارة الحد العام $v_n$ بدلالة $n$، ثم تحقق أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = n$.
3. بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \ln\left(\frac{v_3}{v_2}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right) = u_n$.
4. نعتبر الجداء $P_n$ بحيث: $P_n = 2025^{\frac{v_2}{v_1}} \times 2025^{\frac{v_3}{v_2}} \times \ldots \times 2025^{\frac{v_{n+1}}{v_n}}$.
   أ) بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n = 45^{n(n+1)}$.
   ب) عين قيمة العدد الطبيعي $n$ التي من أجلها يكون $P_n = 2025^{2016}$.

### التمرين الثاني: 05 نقاط

**الجزء الأول:** نعتبر الأعداد الطبيعية $a$، $b$، $A$، $B$ و $d$ بحيث $a = 4n+3$، $b = 3n+1$، $A = 8n^2+10n+3$، $B = 6n^2+5n+1$ و $d = PGCD(a;b)$ مع $n \in \mathbb{N}$.

1. أ) بين أن $d = 1$ أو $d = 5$.
   ب) بين أنه إذا كان $d = 5$ فإن $n \equiv 3[5]$.
2. بين أن $A$ و $B$ يقبلان القسمة على $2n+1$، ثم عين تبعا لقيم $n$ وبدلالة $n$: $PPCM(A;B)$.

**الجزء الثاني:** نعتبر العدد الطبيعي $\lambda$ بحيث $\lambda = \left(1962^a + 2024^a\right)^{2025}$.

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الاقليدية للعدد $2^n$ على العدد 5.
2. بين أن $\lambda \equiv 2[5]$، ثم استنتج $PGCD(4\lambda+3;3\lambda+1)$.
3. عين قيم العدد الطبيعي $n$ التي من أجلها يكون $A \equiv B[5]$.

### التمرين الثالث: 04 نقاط

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{u},\vec{v})$ النقط $A(z_A = -2+2i)$، $B(z_B = -2z_A)$ و $C(z_C = 4+8i)$.

1. أ) بين أن $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$.

ب) استنتج طبيعة التحويل النقطي الذي يحول $C$ إلى $B$ محددا عناصره المميزة.

2. عين قيم العدد الطبيعي $n$ التي من أجلها يكون $\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)^n$ حقيقي موجب تماما.

3. بين أن مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق $(z-4-2i)(\overline{z}-4+2i)=36$ هي الدائرة المحيطة بالمثلث $ABC$.

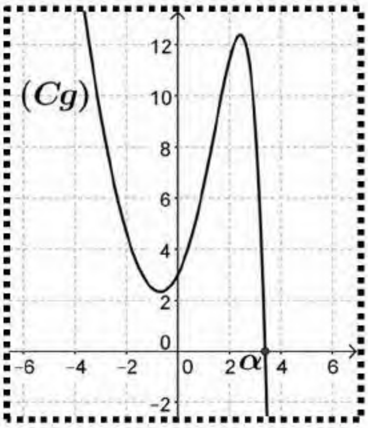
4. نعتبر التحويل النقطي $h$ الذي يحول النقطة $M(z)$ إلى النقطة $M'(z')$ بحيث: $z'=-z+8+4i$.

أ) بين أن $h$ تحاكي يطلب تعيين عناصره المميزة.

ب) عين لاحقة النقطة $D$ صورة $A$ بالتحاكي $h$، ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABDC$.

**التمرين الرابع: 07 نقاط**

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.




**الجزء الأول:** في الشكل المقابل $(C_g)$ هو التمثيل البياني للدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^2-(x-3)e^x$، و العدد الحقيقي $\alpha$ هو فاصلة نقطة تقاطع $(C_g)$ و حامل محور الفواصل بحيث: $3{,}38<\alpha<3{,}4$.

✓ بقراءة بيانية حدد حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$.

**الجزء الثاني:** الدالة $f$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{x^3}{x^2+e^x}$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني بحيث $\|\vec{i}\|=2cm$.

1. بين أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2. أ) بين أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{x^2 g(x)}{(x^2+e^x)^2}$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$.

ب) بين أن $f(\alpha)=\alpha-1-\frac{2}{\alpha-2}$، ثم اعط حصرا لـ $f(\alpha)$.

3. أ) تحقق أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=x-\frac{xe^x}{x^2+e^x}$.

ب) بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ عند $-\infty$، ثم ادرس الوضع النسبي لـ $(C_f)$ و $(\Delta)$.

4. أ) بين أن $(C_f)$ يقبل مماسين يشملان مبدأ المعلم أحدهما حامل محور الفواصل و الآخر $(T)$ معادلة له هي: $y=\frac{4}{4+e^2}x$.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ $(C_f)$ و حامل محور الفواصل، ثم فسر النتيجة هندسيا.

5. أ) أنشئ كلا من $(\Delta)$ و $(T)$، ثم ارسم $(C_f)$. نأخذ $f(-0{,}59)\simeq-0{,}23$ ، $f(\alpha)\simeq0{,}95$.

ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي $m$ التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x)=mx$ أربع حلول متمايزة.

**انتهـــــــــى الموضـــــوع الثاني**