الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية باتنة
الشعبة: الثالثة تقني رياضي

ثانويـة: زانة البيضاء الجديدة
دورة ماي 2024

اختبار البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات
المدة: 04 سا ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول:

I. نعتبر الأعداد المركبة z_1 ، z_2 و z_3 بحيث: $z_1 = 2-2i$ ، $z_2 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$ و $z_3 = \dfrac{z_2}{z_1}$.

1) أ) اكتب كل من z_1 ، z_2 على شكل أسي.

ب) استنتج شكل أسي للعدد z_3 .

2) أ) اكتب z_3 على الشكل الجبري، ثم على شكل مثلثي.

ب) استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، B و M لواحقها z_1 ، z_2 و z على الترتيب.

ولنعتبر العدد المركب L المعرف من أجل كل عدد مركب z يختلف عن z_1 كما يلي: $L = \dfrac{z-z_2}{z-z_1}$.

1) عين $\left(E_1\right)$ مجموعة النقط M بحيث: $|L| = 1$.

2) عين $\left(E_2\right)$ مجموعة النقط M بحيث: $L \in \mathbb{R}^*$.

3) عين $\left(E_1\right)$ مجموعة النقط M بحيث: L تخيلي صرف.

التمرين الثاني:

نعتبر المتتاليتين العدديتين $\left(U_n\right)$ و $\left(V_n\right)$ المعرفتين على $\mathbb{N}^*$ كما يلي:

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + 2V_n}{3} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} V_1 = 12 \\ V_{n+1} = \dfrac{U_n + 3V_n}{4} \end{cases}$$

1) نضع: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $W_n = V_n - U_n$

أ) بين أن المتتالية $\left(W_n\right)$ هندسية أساسها $\dfrac{1}{12}$.

ب) اكتب عبارة الحد العام للمتتالية $\left(W_n\right)$.

ج) احسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$

2) أ) ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين $\left(U_n\right)$ و $\left(V_n\right)$.

ب) استنتج أن المتتاليتين $\left(U_n\right)$ و $\left(V_n\right)$ متقاربتان نحو نفس النهاية.

3) نعتبر المتتالية $\left(t_n\right)$ المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $t_n = 3U_n + 8V_n$

أ) بين أن المتتالية (t_n) ثابتة على $\mathbb{N}^*$.

ب) استنتج النهاية المشتركة للمتتاليتين (U_n) و (V_n).

4) نعتبر المجموع S_n المعرف على $\mathbb{N}^*$ بـ: $S_n=\sum_{k=1}^{n}C_n^k\left(V_k-U_k\right)$. عبر بدلالة n عن المجموع S_n.

التمرين الثالث:

1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $3x-2y=1$.

n عدد طبيعي.

2) أ) بين أن الثنائية $(14n+3;21n+4)$ حل للمعادلة (E).

ب) استنتج أن العددين $14n+3$ و $21n+4$ أوليان فيما بينهما.

3) نعتبر العددين a و b حيث $a=2n+1$ و $b=21n+4$.

أ. عين جميع القيم الممكنة لـ $PGCD(a;b)$.

ب. بين أنه إذا كان $PGCD(a;b)=13$ فإن: $n\equiv 6[13]$.

n عدد طبيعي أكبر تماما من 1.

4) نعتبر العددين الطبيعيين A و B بحيث: $A=2n^2-n-1$ و $B=21n^2-7n-4$.

أ. بين أن: $n-1$ يقسم كلا من A و B.

ب. عين تبعا لقيم n وبدلالة n : $PGCD(A;B)$.

التمرين الرابع:

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\left(x^2+2x\right)e^{x-1}-1$

1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ) بين أن: المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث: $0{,}58\prec\alpha\prec 0{,}59$.

ب) ادرس إشارة $g(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2e^{x-1}-x$

(C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، (وحدة الطول هي: $2cm$)

1) أ) احسب كلا من: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) بين أن: المستقيم (D) ذا المعادلة المختصرة $y=-x$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$.

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (D).

2) أ) بين أن: من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$.

ب) استنتج أن: f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) اثبت أن (C) يقبل مماسين متوازيين أحدهما ينطبق على (D)، ثم اكتب معادلة ديكارتية للمماس الثاني.

د) بين أن (C) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين فاصلتي كل منهما.

3) انشئ كلا من المماسين السابقين، احسب $f(0)$ و $f(1)$ ، ثم مثل (C). (نأخذ: $f(\alpha)\simeq-0{,}36$).

4) ليكن m وسيط حقيقيا، ناقش بيانيا تبعا لقيم m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x)=-x+m$

5) نعتبر التكامل I بحيث: $I=\int_{-1}^{0}x^2e^{x-1}dx$.

أ) باستخدام المكاملة بالتجزئة مرتين احسب قيمة I.

ب) فسر هندسيا النتيجة المحصل عليها.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول:

يحتوي صندوق غير شفاف على أربع كريات بيضاء، ثلاث كريات سوداء وكريتين حمراوين (الكريات كلها متماثلة لا نميز بينها عند اللمس). نسحب عشوائيا في آن واحد ثلاث كريات من هذا الصندوق.

1) احسب احتمال كل حدث من الأحداث التالية:

A : " سحب كريتين سوداوين وكرية حمراء " ، B : " سحب ثلاث كريات مختلفة اللون "

C : " سحب كرية حمراء على الأقل "

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الألوان التي تحملها الكريات الثلاث المسحوبة.

أ) برر أن: قيم المتغير العشوائي X هي: $\{1;2;3\}$

ب) بين أن: $P(X=2)=\dfrac{55}{84}$ ، ثم عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X.

ج) احسب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X.

التمرين الثاني:

I. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. كما هو موضح في الشكل المرفق.

1) اثبت أن: الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

2) بين أن: إذا كان: $x\in[1;2]$ فإن: $f(x)\in[1;2]$.

II. نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$

1) أ. مثل على حامل محور الفواصل الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية (U_n) مبرزا خطوط الانشاء.

ب. أعط تخمينا حول رتابة وتقارب المتتالية (U_n).

2) أ. برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n: $1\prec U_n\leq 2$

ب. اثبت أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

ج. برر تقارب المتتالية (U_n).

III. نعتبر المتتاليتين العدديتين (V_n) و (W_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي: $V_n=\dfrac{U_n-1}{U_n}$ و $W_n=\ln V_n$.

1) أ) بين أن المتتالية (W_n) هندسية أساسها 2.

ب) اكتب عبارة الحد العام للمتتالية (W_n) ، ثم استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (V_n) .

2) أ) استنتج أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n=\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n}\right]^{-1}$.

ب) احسب: $\lim_{n\to+\infty} U_n$

3) نعتبر الجداء P_n المعرف على $\mathbb{N}$ بـ: $P_n = V_0 \times V_1 \times \ldots \times V_n$.

عبر بدلالة n عن الجداء P_n .

التمرين الثالث:

1) عين ثنائية $(\alpha;\beta)$ من الأعداد الصحيحة تحقق: $23\alpha + 7\beta = 1$.

2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهول $(u;v)$ التالية: $23u - 7v = -6$.

أ) بالاعتماد على النتيجة المحصل عليها في جواب السؤال الأول استنتج حلا خاصا للمعادلة (E).

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

3) نعتبر الجملة (S) ذات المجهول الصحيح x التالية:

$$\begin{cases} x \equiv 10[23] \\ x \equiv 4[7] \end{cases}$$

أ) اثبت صحة التكافؤ التالي: x حل للجملة (S) إذا وفقط إذا وجدت ثنائية $(u;v)$ من الأعداد الصحيحة تحقق:

$$\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 23u + 10 \end{cases}$$

ب) استنتج مجموعة حلول الجملة (S).

ج) عين أصغر عدد طبيعي x_0 حل للجملة (S) يكون قابلا للقسمة على 16.

التمرين الرابع:

I. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 - 2\ln(x)$

1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) استنتج أن: من أجل كل $x \in]0;+\infty[$: $g(x) \succ 0$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1+\ln(x)}{x}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، (وحدة الطول هي: $2cm$)

1) أ) احسب كلا من: $\lim_{x \to 0^{>}} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بين أن: المستقيم (D) ذا المعادلة المختصرة $y = \dfrac{x}{2}$ مقارب مائل لـ (C).

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (D).

2) أ) بين أن: من أجل كل $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) اثبت أن (C) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي المستقيم (D) في النقطة A ذات الفاصلة 1 ، ثم اكتب معادلة له.

3) أ) بين أن: من أجل كل $x \in]0;+\infty[$: $f''(x) = \dfrac{2\ln(x) - 1}{x^3}$.

ب) ادرس إشارة $f''(x)$ ، ثم استنتج أن: (C) يقبل نقطة انعطاف وحيدة B يطلب تعيين احداثيتيها.

ج) اكتب معادلة ديكارتية لـ (T') مماس (C) في النقطة B.

4) أ) بين أن: (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α بحيث: $0,34 \prec \alpha \prec 0,35$.

ب) انشئ كلا من (D) ، (T) و (T') ، ثم مثل (C).

5) ليكن m وسيطا حقيقيا، ناقش بيانيا تبعا لقيم m عدد حلول المعادلة: $f(x)=\frac{1}{2}x+m$

6) احسب بـ cm^2 مساحة الحيز تحت المنحنى (C) بين العددين 1 و e.

انتهى الموضوع الثاني