الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية" المادة: رياضيات	**اختبار** **الفصل الأول**	الموسم الدراسي: 2021/2020 المدة: ثلاث ساعات (3سا) إعداد: عبد المطلب

تمرين1 (4نقاط)

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 وأربع كريات سوداء تحمل الأرقام 2 ، 2 ، 2 ، 3 وخمس كريات خضراء تحمل الأرقام 4 ، 4 ، 5 ، 5 ، 5. (لا نفرق بينها عند اللمس)

نسحب من هذا الكيس كريتين في آن واحد بطريقة عشوائية.

1) A و B حادثتان حيث: A: "سحب كريتين إحداهما سوداء تحمل الرقم 2 والثانية لونها مختلف"، و B: "سحب كريتين تحملان رقمين مجموعهما أكبر تماما من 3". بيّن أنّ $P(A)=\frac{4}{11}$ و $P(B)=\frac{19}{22}$ ، ثم استنتج حساب $P(A\cup B)$.

2) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب الرقم الأكبر بين رقمي الكرتين المسحوبتين، والرقم 6 إذا كانت الكريتان تحملان نفس الرقم.

أ) عيّن مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X ، ثم بيّن أنّ: $P(X=4)=\frac{7}{33}$ و $P(X=6)=\frac{1}{6}$.

ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثم احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

3) نجري الآن n سحبة متتالية لكرية بحيث نعيد في كل مرة الكرية المسحوبة إلى الكيس.

أ) عبّر بدلالة العدد الطبيعي n الاحتمال P_n للحصول على الكريات البيضاء فقط، ثم عيّن أكبر قيمة للعدد n بحيث يكون $P_n \geq 0{,}002$.

ب) احسب احتمال سحب كرية واحدة فقط بيضاء.

تمرين2 (4نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=-3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+8}-4$.

1) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $-3\leq u_n<-2$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=-\frac{(u_n+2)(u_n+4)}{\sqrt{2u_n+8}+u_n+4}$. استنتج اتّجاه تغيّر (u_n) وتقاربها.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}+2\geq(2-\sqrt{2})(u_n+2)$.

ب) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0>u_n+2\geq-(2-\sqrt{2})^n$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول v_0 ، ومن أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=\frac{1}{2^n}\ln\left(\frac{u_n+4}{2}\right)$.

أ) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية، أساسها $q=\frac{1}{4}$ ، يطلب كتابة حدّها العام بدلالة n.

ب) نضع $P_n=(u_0+4)\times(u_1+4)\times\ldots\times(u_n+4)$. بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $P_n=2^{2^{-n}+n-1}$.

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

تمرين3 (5نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. M نقطة لاحقتها العدد المركب z ، حيث $z=x+iy$ ،

x و y عددين حقيقيين. نرفق بكل عدد مركب z حيث $z\neq -i$ العدد المركب Z: $Z=\dfrac{iz+5}{z+i}$.

1) بيّن أنّ الكتابة الجبرية للعدد المركب Z هي: $Z=\dfrac{6x}{x^2+(y+1)^2}+i\,\dfrac{x^2+y^2-4y-5}{x^2+(y+1)^2}$.

2) عيّن وأنشئ المجموعة E_1 للنقط M من المستوي حتى يكون Z عددا تخيليا صرفا.

3) عيّن وأنشئ المجموعة E_2 للنقط M من المستوي حتى يكون Z عددا حقيقيا، مع ذكر العناصر المميّزة لـ E_2.

4) عيّن وأنشئ المجموعة E_3 للنقط M من المستوي حتى تكون طويلة $Z+i$ تساوي 2 بمعنى $|Z+i|=2$.

5) عيّن وأنشئ المجموعة E_4 للنقط M من المستوي بحيث يتحقّق $Z=\overline{z}$.

تمرين4 (7نقاط)

I- g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-\infty;+\infty[$ بـ: $g(x)=x(x-2-e^{-x})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$.

2) بيّن أنّ: $g'(x)=(x-1)(e^{-x}+2)$ ، ادرس إشارتها ثم شكّل جدول تغيرات الدالة g.

3) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين، أحدهما معدوم والآخر α حيث $2{,}1<\alpha<2{,}2$. استنتج إشارة $g(x)$.

II- f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=x+\dfrac{e^{-x}+1}{x-1}$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}f(x)$. فسّر نتيجتي النهايتين هندسيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ وبيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

ج) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلته.

2) أ) بيّن أنّ: من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$. استنتج اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

ب) ليكن (T) المماس للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة β. بيّن أنّ المماس (T) يشمل النقطة A حيث $A(1,0)$

إذا تحقّق: $(\beta+1)(e^{-\beta}+1)=0$. استنتج أنّ معادلة المماس (T) هي: $y=\dfrac{3+e}{4}(x-1)$.

3) أ) بيّن أنّ $f(\alpha)=\alpha+1$ ، ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب) احسب $f(-2)$ ، ثم ارسم المستقيم المقارب (Δ) ، المماس (T) والمنحني $(\mathscr{C})$.

4) m وسيط حقيقي، ولتكن f_m الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f_m(x)=x+\dfrac{e^{-x}+m}{x-1}$ و $(\mathscr{C}_m)$ تمثيلها البياني.

أ) p و q عددين حقيقيين موجبين تماما حيث $p<q$. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathscr{C}_p)$ و $(\mathscr{C}_q)$.

ب) عيّن قيمة العدد الحقيقي m حتى تكون الدالة f_m هي حل للمعادلة التفاضلية: $(x-1)y'+x(y-1)=x^2$.

بالتّوفيق
DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

تصحيح اختبار الفصل الأول 2021م

عبد المطلب "

تمرين 1:

(1 $P(A) = \frac{C_3^1 \times C_8^1}{C_{12}^2} = \frac{4}{11}$

$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{C_2^2 C_4^1 + C_2^2}{C_{12}^2} = 1 - \frac{3}{22} = \frac{19}{22}$

أو $P(B) = \frac{C_{10}^2 + C_2^1 \times C_4^1}{C_{12}^2}$ (أكمل)

(2 $X = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(X=4) = \frac{C_2^1 \times C_7^1}{C_{12}^2} = \frac{7}{33}$

$P(X=6) = \frac{C_2^2 + C_4^2 + C_2^2 + C_3^2}{66} = \frac{1}{6}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - \frac{C_3^1 \times C_2^1}{66} = \frac{21}{22}$

أو $P(A \cap B) = 1 - \frac{3}{66}$

ب) قانون الاحتمال للمتغير X :

x_i	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{33}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{7}{33}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{6}$

$E(X) = 2 \times \frac{4}{33} + 3 \times \frac{1}{11} + 4 \times \frac{7}{33} + 5 \times \frac{9}{22} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{97}{22} = 4,409$

(3 $P_n = \frac{3^n}{12^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$P_n \geq 0,002$ يعني: $\frac{1}{4^n} \geq 0,002$ أي: $4^n \leq 500$

$\ln 4^n \leq \ln 500$ ، $n \leq \frac{\ln 500}{\ln 4}$ ، $n \leq 4,48$

ومنه: $n = 4$

ب $P = n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{n}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n$

أو $P = n\left(\frac{1 \times 3^{n-1}}{12^n}\right)$ ؛ أو $= n\left(\frac{3^{n-1}}{4^n}\right)$

تمرين 2:

(1 $u_0 = -3$ ؛ $n=0$: $-3 \leq u_0 < -2$ ومنه ("تحقق")

نفرض أن: $-3 \leq u_n < -2$ ونبرهن صحة: $-3 \leq u_{n+1} < -2$

لدينا: $-3 \leq u_n < -2$ ، $-6 \leq 2u_n < -4$ ، $-3 \leq 2u_n + 8 < 4$

$\sqrt{2} \leq \sqrt{2u_n+8} < 2$ ؛ $-4 \leq \sqrt{2u_n+8} - 4 < -2$

$-3 \leq \sqrt{2} - 4$ و

ومنه: $-3 \leq u_{n+1} < -2$ ؛ إذن: $\forall n \in \mathbb{N}$: $-3 \leq u_n < -2$

ب $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n+8} - 4 - u_n = \frac{(\sqrt{2u_n+8} - 4 - u_n)(\sqrt{2u_n+8} + 4 + u_n)}{\sqrt{2u_n+8} + 4 + u_n}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 8 - (4+u_n)^2}{\sqrt{2u_n+8} + 4 + u_n} = \frac{2(u_n+4) - (u_n+4)^2}{\sqrt{2u_n+8} + 4 + u_n}$

$u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n+2)(u_n+4)}{\sqrt{2u_n+8} + 4 + u_n} > 0$

إذن: $-3 \leq u_n < -2$ ؛ ومنه: $1 \leq u_n + 4 < 2$ (موجب)

و: $-1 \leq u_n + 2 < 0$ (سالب)

إذن (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

(2 لدينا: $u_{n+1} + 2 = \sqrt{2u_n+8} - 2 = \frac{(\sqrt{2u_n+8} - 2)(\sqrt{2u_n+8} + 2)}{\sqrt{2u_n+8} + 2}$

$u_{n+1} + 2 = \frac{2(u_n+2)}{\sqrt{2u_n+8} + 2}$

إذن: $u_{n+1} + 2 \geq (2 - \sqrt{2})(u_n + 2)$ تكافئ:

$\frac{2(u_n+2)}{\sqrt{2u_n+8} + 2} \geq (2 - \sqrt{2})(u_n + 2)$ ($u_n + 2 < 0$)

أي: $\frac{2}{\sqrt{2u_n+8} + 2} \leq 2 - \sqrt{2}$

لدينا سابقا: $\sqrt{2} \leq \sqrt{2u_n+8} < 2$ ومنه:

وعند استعمال الحاور نضرب في 2.

$2 + \sqrt{2} \leq \sqrt{2u_n+8} + 2 < 4$

$\frac{1}{2} < \frac{2}{\sqrt{2u_n+8} + 2} \leq \frac{2}{2+\sqrt{2}}$

لدينا: $\frac{2}{2+\sqrt{2}} = \frac{2(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = 2 - \sqrt{2}$

ومنه: $\frac{2}{\sqrt{2u_n+8} + 2} \leq 2 - \sqrt{2}$ أي: $u_{n+1} + 2 \geq (2 - \sqrt{2})(u_n + 2)$

ب) $n=0$: $-1 \geq u_0 + 2 > -(2 - \sqrt{2})^0$ أي: $-1 \geq -1 > 0$ (تحقق)

نفرض أن: $-(2 - \sqrt{2})^n \leq u_n + 2 < 0$

ونبرهن صحة: $-(2 - \sqrt{2})^{n+1} \leq u_{n+1} + 2 < 0$

لدينا: $(2 - \sqrt{2}) \times \left[-(2-\sqrt{2})^n \leq u_n + 2 < 0\right]$

$-(2 - \sqrt{2})^{n+1} \leq (2 - \sqrt{2})(u_n + 2) < 0$

وبما أن: $u_{n+1} + 2 \geq (2 - \sqrt{2})(u_n + 2)$

ومنه: $-(2 - \sqrt{2})^{n+1} \leq u_{n+1} + 2 < 0$ ؛

إذن: $\forall n \in \mathbb{N}$: $-(2 - \sqrt{2})^n \leq u_n + 2 < 0$

لدينا: $-1 < 2 - \sqrt{2} < 1$ ومنه: $\lim_{n \to +\infty} (2 - \sqrt{2})^n = 0$

باستعمال مبرهنة الحاصر: $\lim_{n \to +\infty} (u_n + 2) = 0$

ومنه: $\lim_{n \to +\infty} u_n = -2$

(3 $v_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(\frac{u_{n+1} + 4}{2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(\frac{\sqrt{2u_n+8}}{2}\right)$

$v_{n+1} = \frac{1}{2 \times 2^n} \ln\left(\frac{2u_n+8}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^n} \ln\left(\frac{u_n+4}{2}\right) = \frac{1}{4} v_n$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ و $v_0 = -\ln 2$.

$v_n = v_0 q^n = -\ln 2 \left(\frac{1}{4}\right)^n$

ب $\ln\left(\frac{u_n+4}{2}\right) = 2^n v_n$: ومنه $(u_n + 4) = 2e^{2^n v_n}$

$(u_n+4) = 2e^{2^n\left(\frac{-\ln 2}{4^n}\right)} = 2\left(e^{-\ln 2}\right)^{\frac{1}{2^n}} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}}$

$P_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^0}} \times 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^1}} \times \dots \times 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}} = 2^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \dots + \frac{1}{2^n}}$

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري