الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية جيجل — الموسم الدراسي: 2023م-2024م

ثانوية راشدي محمد ـسيدي معروف — المستوى: الثالثة ـرياضيات

اختبار الفصل الثاني في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين ويجيب عليه:

الموضوع الأوّل:

التمرين الأول: (06 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة والقابلة للإشتقاق على المجال: $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{1+ax^2}$ حيث $a\in\mathbb{R}_+-\{1\}$.

I/ تحقق أن الدالة f متزايدة تماما.

II/ نعتبر (u_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول: $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{1+a(u_n)^2}$.

1/ نفرض أن: $0<a<1$.

ا/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leq u_n\leq\frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

ب/ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة .

ج/ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم عين نهايتها.

2/ نفرض أن: $a>1$.

نعتبر (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=(u_{n+1}-u_n)(u_{n+1}+u_n)$.

ا/ بين أن المتتالية (v_n) هندسية، يُطلب تعيين أساسها وحدها الاول.

ب/ اِستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $(u_{n+1})^2-(u_n)^2=a^n$.

ج/ نعرف على $\mathbb{N}$ المتتالية (w_n) كالتالي:

$$\begin{cases} w_0=0 \\ w_n=1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-1} \quad ;n\geq 1 \end{cases}$$.

- أكتب w_n بدلالة n .

د/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\sqrt{w_n}$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الثاني: (07 نقاط)

1/ ا/ أُدرس أولية العدد 631 .

ب/ تحقق أنه من أجل كل عددين حقيقيين x و y: $x^3-y^3=(x-y)(x^2+y^2+xy)$.

ج/ جد جميع الثنائيات المرتبة $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق: $x^3-y^3=631$.

2/ لتكن المعادلة ذات المجهول $(a;b)$ من $\mathbb{Z}^2$ التالية: $1962b-1830a=18\cdots(E)$.

ا/ بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب/ تحقق أن الثنائية $(15;14)$ حل للمعادلة (E) ، ثم استنتج حلول المعادلة (E) .

ج/ عين الثنائيات الطبيعية (a,b) من حلول المعادلة (E) التي تحقق: $PGCD(a,b)=3$.

منصة القلم الجزائري | DZPEN.COM

3/ ا/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13 .

ب/ بين أنه إذا كانت الثنائية $(\alpha;\beta)$ حلا للمعادلة (E) فإن: $6\times 9^{327\beta}+3^{610\alpha+2024}-1445\equiv 0[13]$.

التمرين الثالث: (07 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln(e^x+1)}{e^{x-2}}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ ا/ عين نهاية الدالة f عند $-\infty$.

ب/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=e^2\left[\dfrac{x}{e^x}+e^{-x}\ln(e^{-x}+1)\right]$

ج/ عين نهاية الدالة f عند $+\infty$.

د/ استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين، يُطلب تعيين معادلة لكل منهما.

2/ نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)$.

ا/ بين أن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

3/ ا/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^{-x+2}g(e^x)$.

ب/ إستنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4/ أحسب $f(0)$ ، ثم أنشئ المستقيمات المقاربة والمنحنى (C_f).

5/ لتكن F الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

ا/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\dfrac{1}{e^x+1}=1-\dfrac{e^x}{e^x+1}$ ، ثم أحسب: $\int_0^x \dfrac{1}{e^t+1}dt$.

ب/ باستعمال المكاملة بالتجزئة، بين أن: $F(x)=e^2[x-\ln(1+e^x)]-f(x)+2e^2\ln 2$.

ج/ أحسب $F(\ln 2)$ وفسره هندسيا، ثم عين $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

انتهى الموضوع الأوّل.

منصة القلم الجزائري | DZPEN.COM

الموضوع الثّاني:

التمرين الأول: (06 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ : $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{a + 2au_n}{a + 1 + u_n}$ حيث a عدد حقيقي.

1/ عين قيم a التي تجعل المتتالية (u_n) ثابتة.

2/ نفرض أن: $a > 3$.

ا/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < a$.

ب/ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ج/ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم عين نهايتها.

3/ نفرض أن $a = 2$ ، ونعتبر (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$.

ا/ بين أن المتتالية (v_n) هندسية، يُطلب تعيين أساسها وحدها الاول.

ب/ أكتب v_n بدلالة n، ثم استنتج u_n بدلالة n وأحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

ج/ أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = \dfrac{1}{1+u_0} + \dfrac{1}{1+u_1} + \cdots + \dfrac{1}{1+u_n}$.

4/ نفرض أن $a = -1$ ، ونعتبر (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$.

ا/ بين أن المتتالية (w_n) حسابية، يُطلب تعيين أساسها وحدها الاول.

ب/ أكتب w_n بدلالة n، ثم استنتج u_n بدلالة n وأحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثاني: (07 نقاط)

نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ التالية: $45x + 20y = 2^m - 18$ ... (E_m) .

I/1/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي m بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^m على 5 .

2/ عين قيم العدد الطبيعي m التي تجعل المعادلة (E_m) تقبل حلولا.

II/ نضع $m = 7$ ، ونعتبر المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ التالية: $9x + 4y = 22$ ... (E)

1/ ا/ تحقق أن المعادلة (E_7) تقبل حلولا، ثم استنتج أن المعادلة (E_7) تكافئ المعادلة: (E) .

ب/ بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن: $x \equiv 2\,[4]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E) .

2/ ليكن N عددا طبيعيا يُكتب $\overline{133\alpha\beta3}$ في النظام ذو الأساس 4 ، ويُكتب $\overline{56\alpha0}$ في النظام ذو الأساس 7 ، حيث α و β عددان طبيعيان.

- عين α و β ، ثم أُكتب N في النظام العشري.

منصة القلم الجزائري | DZPEN.COM

3/ نعتبر: $a = 88n + 22$ و $b = 198n + 44$ ، حيث n عدد طبيعي، وليكن $d = PGCD(a, b)$.

ا/ تحقق أن الثنائية $(a; -b)$ حل للمعادلة (E) ، ثم استنتج القيم الممكنة لـ d .

ب/ تحقق أن 22 يقسم كلا من a و b .

ج/ باستعمال مبرهنة بيزو، بين أن العددين $(4n + 1)$ و $(9n + 2)$ أوليان فيما بينهما، ثم استنتج قيمة d .

التمرين الثالث: (07 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{1 - e^x}{x^2}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. (نأخذ: $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$)

1/ أحسب $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتائج هندسيا.

2/ نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 2(1 - e^{-x}) - x$.

ا/ أدرس إتجاه تغير الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

ب/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\ln 4 < \alpha < \ln 6$.

ج/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

3/ ا/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما: $f'(x) = \dfrac{e^x}{x^3} g(x)$.

ب/ إستنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4/ أنشئ المنحنى (C_f). (نأخذ: $f(\alpha) \simeq -1.5$)

5/ لتكن F الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $F(x) = \begin{cases} \int_x^{2x} \dfrac{1 - e^t}{t^2} dt & ; x > 0 \\ -\ln 2 & ; x = 0 \end{cases}$.

ا/ باستعمال المكاملة بالتجزئة، بين أنه من أجل كل $x > 0$: $F(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{2x} - \dfrac{e^x - 1}{x} - \int_x^{2x} \dfrac{e^t}{t} dt$.

ب/ بين أنه من أجل كل $x > 0$ فإن: $e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \dfrac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln 2$.

ج/ أحسب $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\int_x^{2x} \dfrac{e^t}{t} dt \right)$ ، ثم استنتج أن الدالة F مستمرة على يمين 0 .

انتهى الموضوع الثاني.

☺☺بالتوفيق للجميع☺☺

مـنـصـــة الـقـلـم الـجـزائـــري | DZPEN.COM

✓ تلميذة: راشدي محمد — ✓ الموسم الدراسي: 2023/2024
- بسيدي معروف. ✓ المستوى: 03 رياضيات

متابعة الإجابة الثاني في مادة الرياضيات.

الموضوع الأول:

$f(x)=\sqrt{1+ax^2}$; $D_f=[0,+\infty[$; $a\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}$

(I) التحقق أن f متزايدة تماما:

لدينا الدالة f تقبل الإشتقاق على $[0,+\infty[$ و:

$f'(x)=\frac{2ax}{\sqrt{1+ax^2}} > 0$

إذن: الدالة f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$.

(II) (u_n) : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\sqrt{1+a(u_n)^2} \end{cases}$

1) نفرض: $0<a<1$ ؛

أ) البرهان بالتراجع:

نسمي $P(n)$ الخاصية: « $0\leq u_n\leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$ »

ولنثبت صحتها من أجل كل عدد طبيعي n.

- من أجل $n=0$: لدينا: $u_0=0$

أي: $0\leq u_0\leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$ إذن $P(0)$ صحيحة.

- ليكن n عددا طبيعيا كيفيا.

نفرض صحة $P(n)$ أي $0\leq u_n\leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

ولما أن f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

فإن $f(0)\leq f(u_n)\leq f\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}}\right)$

لدينا: $f(0)=\sqrt{1+a(0)}=1$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}}\right)=\sqrt{1+a\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{a}{1-a}}=\sqrt{\frac{1-a+a}{1-a}}$

$=\sqrt{\frac{1}{1-a}}=\frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

ومنه: $0<1\leq u_{n+1}\leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

إذن $P(n+1)$ صحيحة بفرض صحة $P(n)$.

وذلك حسب مبدأ البرهان بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leq u_n\leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

ب) البرهان أن (u_n) متزايدة:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1}-u_n=\sqrt{1+a(u_n)^2}-u_n=\frac{1+a(u_n)^2-(u_n)^2}{\sqrt{1+a(u_n)^2}+u_n}$

$=\frac{1+(a-1)(u_n)^2}{\sqrt{1+a(u_n)^2}+u_n}$.

لدينا: $0<a<1$: $\sqrt{1+a(u_n)^2}+u_n>0$ و

ومنه: $a-1<0$ ، ولدينا: $0\leq u_n\leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$

ومنه: $0\leq (u_n)^2\leq \frac{1}{1-a}$

$0\geq (a-1)(u_n)^2\geq \frac{a-1}{1-a}$

أي: $1\geq 1+(a-1)(u_n)^2\geq a$

إذن: $u_{n+1}-u_n\geq 0$ ، إذن (u_n) متزايدة.

ج) الإستنتاج:

لدينا (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى

إذن (u_n) متقاربة.

تعيين نهايتها:

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l\in\mathbb{R}$: متقاربة (u_n)

ومنه: $l=\sqrt{1+al^2}$

أي: $l^2=1+al^2$ ، ومنه $1+(a-1)l^2=0$

ومنه: $l^2=\frac{1}{1-a}$: إذن $l=\pm\sqrt{\frac{1}{1-a}}$

وبما أن $0\leq u_n$: إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

ج) نفرض: $a>0$

$v_n=(u_{n+1}-u_n)(u_{n+1}+u_n)=(u_{n+1})^2-(u_n)^2$.

أ) تبيان أن (v_n) هندسية:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$v_{n+1}=(u_{n+2})^2-(u_{n+1})^2=1+a(u_{n+1})^2-1-a(u_n)^2$

$=a\left((u_{n+1})^2-(u_n)^2\right)=a\,v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=a$

وحدها الأول: $v_0=(u_1)^2-(u_0)^2=\sqrt{1}^2=1$

ب) الإستنتاج:

بما أن (v_n) متتالية هندسية فإن:

$v_n=v_0\times q^n=1\times a^n=a^n$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n: $(u_{n+1})^2-(u_n)^2=a^n$

ج) كتابة w_n بدلالة n:

$w_n=1+a+a^2+\dots+a^{n-1}$

$=1\times\left(\frac{a^n-1}{a-1}\right)=\frac{a^n-1}{a-1}=w_n$

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

Scanné avec CamScanner

1- التباين:

$w_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$

$= q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^{n-1}$

$= (u_1)^2 - (u_0)^2 + (u_2)^2 - (u_1)^2 + \dots + (u_n)^2 - (u_{n-1})^2$

$= -(u_0)^2 + (u_n)^2 - (u_n)^2$

$u_n \geq 0$ ومنه $|u_n| = \sqrt{w_n}$ ، ومنه: $u_n = \sqrt{w_n}$ (20/3)

نهاية المتتالية: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{q^n-1}{q-1}} = +\infty$

التمرين الثاني:

1) أ) دراسة أولية العدد 631: لدينا $\sqrt{631} \approx 25,12$

القاسم :	2	3	5	7	11	13	17	19	23
قابلية القسمة	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗

العدد 631 لا يقبل القسمة على أي عدد أولي أصغر من $\sqrt{631}$ إذن العدد 631 عدد أولي.

ب) التحقق: من أجل كل عددين x و y:

$(x-y)(x^2+y^2+xy) = x^3 + xy^2 + x^2y - yx^2 - y^3 - xy^2$

$= x^3 - y^3$.

ج- إيجاد الثنائيات الطبيعية (x;y) بحيث:

$(x-y)(x^2+y^2+xy) = 631$ تكافئ $x^3 - y^3 = 631$

وإذن: $x-y \mid 631$ ، $x^2+y^2+xy \mid 631$

بما أن x و y أعداد طبيعية فإن $x-y < x^2+y^2+xy$

ومنه $x-y = 1$ و $x^2+y^2+xy = 631$ ... (*) على: $x = 1+y$

بالتعويض في (*) نجد:

$(1+y)^2 + y^2 + (1+y)y = 1 + y^2 + 2y + y^2 + y + y^2$

$\Rightarrow 3y^2 + 3y + 1 = 631$

أي $3y^2 + 3y - 630 = 0$ ومنه لدينا

$\Delta = (3)^2 - 4(3)(-630) = 7569 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 87$

$y = \frac{-3-87}{2(3)} = \frac{-90}{6} = -15 \notin \mathbb{N}$ ومنه

$y = \frac{-3+87}{2(3)} = \frac{84}{6} = 14 \in \mathbb{N}$ و

$x = 1+14 = 15 = x$ ومنه $y = 14$ ومنه:

$(x,y) = (15,14)$ ومنه:

ج- $(E) \dots 1962b - 1830a = 18$

1- تبيان أن المعادلة (E) تقبل حلولا:

لدينا:

$1962 = 1830 \times 1 + 132$

$1830 = 132 \times 13 + 114$

$132 = 114 \times 1 + 18$

$114 = 18 \times 6 + 6$

$18 = 6 \times 3 + 0$

ومنه $PGCD(1962, 1830) = 6$ إذن $6 \mid 18$ وبما أن 6 يقسم 1962 فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب) التحقق:

لدينا: $1962(14) - 1830(15) = 27468 - 27450 = 18$

إذن الثنائية $(15;14)$ حل للمعادلة (E).

جدول المعادلة (E): لدينا:

$1962b - 1830a = 18$

$1962(14) - 1830(15) = 18$ بطرح طرفا لطرف نجد:

$1962(b-14) - 1830(a-15) = 0$

$6 \times (327(b-14) - 305(a-15)) = 0$ ومنه

$\Rightarrow 327(b-14) = 305(a-15)$ أي:

وبما أن $327 \wedge 305 = 1$ فإن: $327 \mid a-15$ ومنه $327 \mid 305(a-15)$

$a = 327k + 15$ أي $a - 15 = 327k$ ومنه:

$327(b-14) = 305(327k)$ بالتعويض في (1) نجد:

$b = 305k + 14$ ومنه $b - 14 = 305k$ ومنه:

$(a,b) = (327k+15; 305+14)$ ومنه:

حيث $k \in \mathbb{Z}$.

ج- تعيين الثنائية (a,b) حيث $a \wedge b = 3$

$a \equiv 0\ [3]$ و $b \equiv 0\ [3]$ معناه: أن $3 \mid a$ و $3 \mid b$

بالطريقة 2 نجد: $\begin{cases} 327k+15 \equiv 0\ [3] \\ 305+14 \equiv 0\ [3] \end{cases}$ ومنه

$2k+1 \equiv 0\ [3]$

$22 \equiv 1\ [3]$ وبما أن $22k \equiv -1\ [3]$ ومنه

$k \equiv 2\ [3]$ ومنه $-22k \equiv k\ [3]$ ومنه:

$q \in \mathbb{N}$ ومنه $k = 3q + 2$ ومنه:

$a = 327(3q+2) + 15 = 981q + 669$

$b = 305(3q+2) + 14 = 915q + 624$

ومنه: $(a,b) = (981q+669; 915q+624)$; $q \in \mathbb{N}$

3- أ) دراسة بواقي قسمة q^n على 13:

$n =$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$r_n =$	1	9	3

لدينا: $\begin{cases} q^0 \equiv 1\ [13] \\ q^1 \equiv 9\ [13] \\ q^2 \equiv 3\ [13] \\ q^3 \equiv 1\ [13] \end{cases}$ ومنه

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

Scanné avec CamScanner

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^2\left(\frac{x}{e^x} + e^{-x}\ln(e^x+1)\right)$ -1.أ

$= 0$

$\frac{x}{e^x} \to 0$ ، $e^{-x}\ln(e^x+1) \to 0$

ب- استنتاج:

المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لحامل محور الفواصل، معادلته:

$y = e^2$ عند $-\infty$ و $y = 0$ عند $+\infty$.

ج- $D_g =]-1;+\infty[$ ؛ $g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$

1- تبيان أن g متناقصة تماما على $[0;+\infty[$:

x من $]-1;+\infty[$ لدينا:

$g'(x) = \frac{1(x+1)-1(x)}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{1-x-1}{(x+1)^2}$

$= \frac{-x}{(x+1)^2}$

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	0	$-$

إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

2- $g(0) = 0$ ، لدينا g متناقصة على $[0;+\infty[$ إذن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا $g(x) < g(0)$

ومنه $g(x) < 0$.

3- أ- التحقق من الاستمرارية:

f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ من أجل كل x لدينا:

$f'(x) = -e^{-x+2}\ln(e^x+1) + \frac{e^x}{e^x+1}e^{-x+2}$

$= e^{-x+2}\left(\frac{e^x}{e^x+1} - \ln(e^x+1)\right) = e^{-x+2}g(e^x)$

$\Pi = 704 + 741j$

$\Pi = 0 + 5i + 2\times5^2 + 5^3j + 2\times5^4$

$\Pi = 5i + 125j + 1300$

$704 + 741j = 5i + 125j + 1300$ ومنه

$616j = 5i + 596$.

$0 \le i \le 4$ و $0 \le j \le 2$ لدينا

j =	0	1	2	الأزواج
i =	$-\frac{596}{5}$	4	$\frac{636}{5}$	مرفوض
	✗	نعم	✗	المقبول

(5) $(i;j) = (4;1)$

ومنه $\Pi = 704 + 741(1) = 1445 = \overline{mm}$

التمرين الثالث:

$f(x) = \frac{\ln(e^x+1)}{e^{x-2}}$ ؛ $D_f = \mathbb{R}$

1- تعيين النهايات:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln(e^x+1)}{e^{x-2}}\right) = \lim_{t\to0} e^2\left(\frac{\ln(t+1)}{t}\right)$

$= e^2$ (بوضع $t = e^x$) 1

ب- التحقق: لدينا من أجل كل عدد حقيقي x:

$e^2\left(\frac{x}{e^x} + e^{-x}\ln(e^x+1)\right) = \left(\frac{x+\ln(e^{-x}+1)}{e^x}\right)e^2$

$= \frac{x+\ln(e^{-x}(1+e^x))}{e^{x-2}} = \frac{x-x+\ln(1+e^x)}{e^{x-2}}$

$= f(x)$.

1.ج تبيان أن $6\times9^{327\beta} + 3^{610\alpha+2024} - 1445 \equiv 0[13]$

حيث $(\alpha;\beta)$ حل لـ (E).

$327\beta - 305\alpha = 3$ لدينا

$6\times9^{327\beta} + 3^{610\alpha+2024} = 6\times9^{327\beta} + 9^{305\alpha+1012}$

$= 9^{327\beta}\left(6 + 9^{305\alpha+1012-327\beta}\right)$

$= 9^{327\beta}\left(6 + 9^{-3+1012}\right)$

$= 9^{327\beta}\left(6 + 9^{1009}\right)$

(1) $9^{327\beta} \equiv 1[13]$ ، حيث $327\beta = 3(109\beta)$ لدينا

$9^{1009} \equiv 9[13]$ ، حيث $1009 = 3(336)+1$ لدينا

(2) $6 + 9^{1009} \equiv 2[13]$ ، حيث $(6+9=15)$

إذن بجمع (1) و(2) طرفا لطرف نجد:

(3) $9^{327\beta}\left(6+9^{1009}\right) \equiv 2[13]$

إذن: $6\times9^{327\beta} + 3^{610\alpha+2024} \equiv 2[13]$ ...(3)

لدينا $1445 = 13\times(111) + 2$

ومنه $1445 \equiv 2[13]$ ...(4)

من (3) و(4) نجد:

$6\times9^{327\beta} + 3^{610\alpha+2024} - 1445 \equiv 2-2[13]$

إذن $6\times9^{327\beta} + 3^{610\alpha+2024} - 1445 \equiv 0[13]$

4- $\Pi = \overline{jzzzjj2}^3 = \overline{qjzio}^5$ لدينا

$\Pi = 2 + 3j + 3^2j + 3^3\times2 + 3^4\times2 + 3^5\times2 + 3^6j$

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

Scanné avec CamScanner

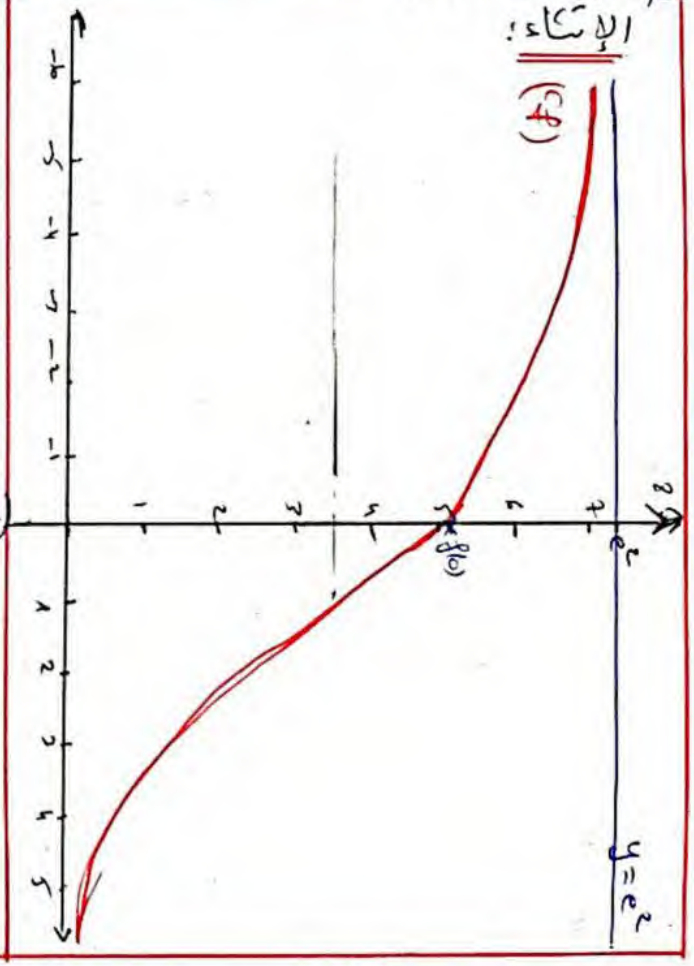
لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^x > 0$ إذن $e^x + 1 > 0$ و $g(e^x) > 0$ ومنه $f'(x) < 0$
إذن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	e^2	↘	0

4- $f(0) = e^2 \ln(2) \approx 5{,}12$

الإنشاء:



5- $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$; $x \in [0; +\infty[$

1- التحقق:

لدينا من أجل كل x عدد حقيقي:

$1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1}$.

ومنه: $\int_0^x \frac{1}{e^t+1}\,dt = \int_0^x \left(1 - \frac{e^t}{e^t+1}\right) dt$

$= \left[t - \ln(e^t+1)\right]_0^x$ $\boxed{x - \ln(e^x+1) + \ln 2}$

ب) الاستنتاج: لدينا

$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x e^{-t+2} \ln(e^t+1)\,dt$

نضع: $\begin{cases} u(t) = \ln(e^t+1) \\ v'(t) = e^{-t+2} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u'(t) = \frac{e^t}{e^t+1} \\ v(t) = -e^{-t+2} \end{cases}$

$F(x) = \left[-e^{-t+2}\ln(e^t+1)\right]_0^x - \int_0^x -\frac{e^t}{e^t+1} e^{-t+2}\,dt$

$= -e^{-x+2}\ln(e^x+1) + e^2\ln 2 + \int_0^x \frac{e^2}{e^t+1}\,dt$

$= -f(x) + e^2\ln 2 + e^2\left(x - \ln(e^x+1) + \ln 2\right)$

$F(x) = e^2\left(x - \ln(e^x+1)\right) + 2e^2\ln 2 - f(x)$

* الدالة F هي الدالة الأصلية للدالة f على $[0; +\infty[$ والتي تنعدم عند $x = 0$.

ج- حساب $F(\ln 2)$:

$F(\ln 2) = e^2(\ln 2 - \ln 3) + 2e^2\ln 2 - e^2\ln 3$

$= e^2\left(\ln 2 + 2\ln 2 - \ln 3 - \frac{1}{2}\ln 3\right)$

$F(\ln 2) = e^2\left(3\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3\right)$

التمرين الثاني: $F(\ln 2)$ هو مساحة الحيز المحدود بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات:

$x = \ln 2$ ، $x = 0$ ، $y = 0$

التأويل:

$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^2\left(x - \ln(1+e^x)\right) - f(x) + 2e^2\ln 2\right)$

$= \lim_{x\to+\infty}\left(e^2\left(\ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)\right) - f(x) + 2e^2\ln 2\right)$

$= \lim_{x\to+\infty}\left(e^2\left(\ln\left(\frac{1}{e^{-x}+1}\right)\right) - f(x) + 2e^2\ln 2\right)$

$= 2e^2\ln 2$

ص: 26

التمرين الأول (أكثر من موضوع الأول)

تابع لكل موضوع

إذن: $e^x\ln 2 \le \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt \le e^{2x}\ln 2$.

1- حساب النهاية:

$\lim_{x\to 0} e^x\ln 2 =$

$\lim_{x\to 0} e^{2x}\ln 2 = \ln 2$

ومنه: $\lim_{x\to 0}\left(\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt\right) = \ln 2$.

$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x} + \frac{e^x-1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt\right)$

$= 1 - 1 - \ln 2$

$= -\ln 2 = F(0)$

إذن F مستمرة على المجال $[0; +\infty[$.

تابع لكل موضوع

ص: 17

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

Scanné avec CamScanner

الموضوع الثاني :

التمرين الأول :

$$(u_n):\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{a + 2a u_n}{a+1+u_n} \end{cases} ; \quad a \in \mathbb{R}.$$

1) - تعيين قيم a بحيث تكون (u_n) ثابتة :

(u_n) ثابتة معناه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n = u_0 = 3$

من : $3 = \dfrac{a + 2a \times 3}{a+1+3}$

ومنه : $3(a+4) = 7a$

ومنه : $12 = 4a$ إذن $a = \dfrac{12}{4} = \boxed{3 = a}$

2) - نفرض أن $a > 3$:

أ) البرهان بالتراجع :

لتكن $p(n)$ الخاصية $0 < u_n < a$ ولنثبت صحتها من أجل كل عدد طبيعي n.

- من أجل $n = 0$: لدينا : $u_0 = 3$ معناه : $0 < u_0 \leq 3 < a$ إذن $p(0)$ محققة.

- ليكن n عددا طبيعيا كيفيا.

نفرض صحة $p(n)$ أي : $0 < u_n < a$.

ومنه : لدينا $u_{n+1} = \dfrac{a + 2a u_n}{a+1+u_n} = \dfrac{2a - a + 2a^2 - 2a^2 + 2a u_n}{a+1+u_n}$

$$= \frac{2a(1+a+u_n) - a - 2a^2}{a+1+u_n} = 2a - \frac{a(1+2a)}{a+1+u_n}$$

لدينا : $a+1 < a+1+u_n < 2a+1$ ومنه $0 < u_n < a$

ومنه : $\dfrac{1}{2a+1} < \dfrac{1}{a+1+u_n} < \dfrac{1}{a+1}$

ومنه : $\dfrac{-a(1+2a)}{a+1} < \dfrac{-a(1+2a)}{a+1+u_n} < \dfrac{-a(1+2a)}{2a+1}$

ومنه : $2a - \dfrac{a(2a+1)}{a+1} < 2a - \dfrac{a(1+2a)}{a+1+u_n} < 2a - a$

إذن : $\dfrac{2a^2 + 2a - 2a^2 - a}{a+1} < u_{n+1} < a$

أي $0 < \dfrac{a}{a+1} < u_{n+1} < a$.

إذن $p(n+1)$ محققة بفرض أن $p(n)$ صحيحة.

إذن حسب مبدأ البرهان بالتراجع : من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < a$.

ب) تبيان أن (u_n) متزايدة تماما :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{a + 2a u_n}{a+1+u_n} - u_n = \frac{a + 2a u_n - a u_n - u_n - (u_n)^2}{a+1+u_n}$$

$$= \frac{-(u_n)^2 + (a-1)u_n + a}{a+1+u_n}$$

لدينا باعتبار كثير الحدود : $-X^2 + (a-1)X + a$

$\Delta = (a-1)^2 - 4(-1)(a) = a^2 - 2a + 1 + 4a$

$= a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 > 0$

ومنه $\sqrt{\Delta} = a+1$.

ومنه حلولها هي : $X_1 = \dfrac{1 - a - a - 1}{2(-1)} = a$

$X_2 = \dfrac{1 - a + a + 1}{2(-1)} = -2$

X	$-\infty$	-2	a	$+\infty$
$-X^2+(a-1)X+a$	$-$	0	$+$	0	$-$

ومنه من أجل n : $u_n < a$ إذن : $-(u_n)^2 + (a-1)u_n + a > 0$

إذن : $u_{n+1} - u_n > 0$ إذن (u_n) متزايدة تماما.

3) - الاستنتاج :

(u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بعدد موجب تماما، إذن متقاربة.

تعيين نهايتها : نضع : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

ومنه $\ell = \dfrac{a + 2a\ell}{a+1+\ell}$

ومنه $\ell(a+1+\ell) = a + 2a\ell$

$\ell^2 + (a+1)\ell - 2a\ell - a = 0$

أي : $\ell^2 + (1-a)\ell - a = 0$

أو $-\ell^2 + (a-1)\ell + a = 0$

$\ell = a$ أو $\ell = -2$ مرفوضة لأن $0 < u_n < a$

وبما أن $0 < u_n < a$ فإن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$

4) - نفرض $a = 2$: (v_n) : $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$.

أ) تبيان أن (v_n) هندسية :

لدينا ومنه $u_{n+1} = \dfrac{2 + 4u_n}{4 + u_n}$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{2+4u_n}{4+u_n} - 2}{\frac{2+4u_n}{4+u_n} + 1} = \frac{2 + 4u_n - 8 - 2u_n}{2 + 4u_n + 4 + u_n}$$

$$= \frac{-6 + 2u_n}{6 + 5u_n} = \frac{2(u_n - 3)}{5(u_n + 1)}$$

$$= \frac{2}{5} v_n$$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{2}{5}$

ومنه الأول : $v_0 = \dfrac{3-2}{3+1} = \dfrac{1}{4}$

- 05 -

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

Scanné avec CamScanner

$v_n = v_0 \times q^n$; بما أنها متتالية هندسية

$v_n = \frac{1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1} = 1 - \frac{3}{u_n + 1}$; إذن $-\frac{3}{u_n+1} = v_n - 1$ ، ومنه

$u_n + 1 = \frac{-3}{v_n - 1}$ ، أي

$u_n = \frac{3}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n} - 1$ ؛ ومنه $u_n = \frac{3}{1 - v_n} - 1$

$\lim u_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n} - 1 \right) = 3 - 1 = 2$

ج1- حساب المجموع :

لنبين أولا أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$\frac{1}{u_{n+1}} = -\frac{1}{3}(v_n - 1)$ ، ومنه $-\frac{3}{u_n + 1} = v_n - 1$

$= -\frac{1}{3} v_n + \frac{1}{3}$.

ومنه $S_n = \frac{1}{1+u_0} + \frac{1}{1+u_1} + \cdots + \frac{1}{1+u_n}$

$= \left(-\frac{1}{3} v_0 + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3} v_1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{3} v_n + \frac{1}{3}\right)$

$= -\frac{1}{3}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3}\right)$

$= -\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{2}{3}} \right) + \frac{1}{3}(n - 0 + 1)$

$= -\frac{1}{12} \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} \right) + \frac{1}{3}(n+1)$

$= -\frac{5}{36} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{3}(n+1) = S_n$

$u_{n+1} = \frac{-1 - 2u_n}{u_n}$ ، إذا وضعنا $a = -1$ -4

ونضع : $w_n = \frac{u_n + 2}{u_n + 1} = 1 + \frac{1}{u_n + 1}$.

ب- تبيان أن (w_n) متتالية حسابية :

$w_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{-1 - 2u_n}{u_n} + 2}{\frac{-1 - 2u_n}{u_n} + 1}$

$= \frac{-1 - 2u_n + 2u_n}{-1 - 2u_n + u_n} = \frac{-1}{-1 - u_n}$

$= \frac{1}{1 + u_n} = w_n - 1$.

$r = -1$ ، ومنه (w_n) متتالية حسابية أساسها

حدها الأول : $w_0 = \frac{3+2}{3+1} = \frac{5}{4}$.

ج- عبارة الحد العام :

$w_n = w_0 + nr$

$= \frac{5}{4} + (-1)n = \frac{5}{4} - n = w_n$

لدينا $w_n - 1 = \frac{1}{u_n + 1}$ ، ومنه $u_n + 1 = \frac{1}{w_n - 1}$

ومنه $u_n = \frac{1}{w_n - 1} - 1$

إذن $u_n = \frac{1}{\frac{5}{4} - n - 1} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{4} - n} - 1$

$\lim_{n \to +\infty} u_n = -1$ ومنه

1- التحقق أن (E_7) تقبل حلولا :

لدينا $m = 7 = 4(1) + 3$ ، إذن (E_7) تقبل حلولا.

نكافئ $45x + 20y = 110$

$9x + 4y = 22$ أي $5(9x) + 5 \times 4y = 5 \times 22$

إذن (E_7) تكافئ (E).

التمرين الثاني :

$(E_m) \cdots 45x + 20y = 2^m - 18 \; ; \; m \in \mathbb{N}$

I) دراسة بواقي قسمة 2^m على 5 :

ومنه $2^0 \equiv 1 \; [5]$

$2^1 \equiv 2 \; [5]$

$2^2 \equiv 4 \; [5]$

$2^3 \equiv 3 \; [5]$

$2^4 \equiv 1 \; [5]$

$m =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
$r_m =$	1	2	4	3

ب- حتى تقبل (E_m) حلولا يجب :

لدينا $\text{PGCD}(45;20) \mid 2^m - 18$

$45 = 20 \times 2 + 5$

$20 = 5 \times 4 + 0 \Rightarrow 45 \wedge 20 = 5$

ومنه $5 \mid 2^m - 18$ يجب أن

$2^m - 18 \equiv 0 \; [5]$ أي $2^m \equiv 18 \; [5]$ ومنه

$2^m \equiv 3 \; [5]$.

ومنه $m = 4k + 3 \; ; \; k \in \mathbb{N}$

II) $m = 7$ يعني $(E_7) \cdots 45x + 20y = 110$

$(E) \cdots 9x + 4y = 22$

1- التحقق أن (E_7) تقبل حلولا :

لدينا $m = 7 = 4(1) + 3$ ، إذن (E_7) تقبل حلولا.

نكافئ $45x + 20y = 110$

$9x + 4y = 22$ أي $5(9x) + 5 \times 4y = 5 \times 22$

إذن (E_7) تكافئ (E).

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

Scanné avec CamScanner

التمرين الثالث:

$f(x)=\frac{1-e^x}{x^2}$ $\quad D_f=]0,+\infty[$

1- حساب النهايات:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{e^x}{x^2}\right)=-\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\times(-1)\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\right]$

$=-\infty$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=0$ مقاربا بجوار 0.

2- دراسة إشارة g حيث $g(x)=2(1-e^{-x})-x$; $D_g=]0,+\infty[$

$g'(x)=2e^{-x}-1$.

$2e^{-x}-1>0$	$2e^{-x}-1=0$
$2e^{-x}>1$	$2e^{-x}=1$
$e^{-x}>\frac{1}{2}$	$e^{-x}=\frac{1}{2}$
$-x>\ln\left(\frac{1}{2}\right)$	$-x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$
$x<\ln 2$	$x=\ln 2$

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

جدول تغيرات g على $]0;\ln 2]$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;\ln 2]$ ومستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[\ln 2;+\infty[$.

$k=0$ ومنه $\begin{cases}-\frac{1}{2}\le k\le\frac{1}{4}\\ \frac{1}{9}\ge k\ge-\frac{2}{9}\end{cases}$ ومنه $k\in\left[-\frac{2}{9};\frac{1}{9}\right]\cap\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right]$

ومنه $(\alpha;\beta)=(2,1)$

3- $N=7(2)+2009$ بالتعويض في N نجد

$=14+2009=2023=N$.

4- $a=88n+22$; $b=198n+44$

$d=PGCD(a,b)$.

أ- التحقق: لدينا $9a+4(-b)=9(88n+22)-4(198n+44)$

$=792n+198-792n-176$

$=22$

إذن: $(a;-b)$ حل للمعادلة (E).

ب- استنتاج قيم d: لدينا $d|a$ و $d|b$

ومنه $d|9a-4b$ أي $d|22$

ومنه $d\in D_{22}=\{22;11;2;1\}$

ج- التحقق: لدينا $a=22(4n+1)$

و $b=22(9n+2)$

إذن a و b يقبلان القسمة على 22.

د- لدينا $9(4n+1)-4(9n+2)=9-8$

$=1$

إذن حسب مبرهنة بيزو العددان $(4n+1)$ و $(9n+2)$ أوليان فيما بينهما.

ومنه $PGCD(a,b)=22\,PGCD(9n+2;4n+1)$.

$=22\times1=22$

(E) حل المعادلة (x,y) حيث

$9x=4(-y)+22$ ومنه $9x+4y=22$

$=4(-y)+4(5)+2$

$=4(-y+5)+2$

$9\equiv1[4]$ لأن $9x\equiv2[4]$ ولدينا

$x\equiv2[4]$ إذن $9x\equiv x[4]$ ومنه

حلول المعادلة (E) لدينا $x\equiv2[4]$

$x=4k+2$; $k\in\mathbb{Z}$: أي

بالتعويض في (E) نجد

$9(4k+2)+4y=22$

$9\times4k+4y=22-18$ ومنه

$4y=-9\times4k+4$ أي

$y=-9k+1$; $k\in\mathbb{Z}$ أي

إذن $(x,y)=(4k+2;-9k+1)$; $k\in\mathbb{Z}$

ب- $N=\overline{133\alpha\beta3}^4=\overline{56\alpha0}^7$

أي $3+4\beta+16\alpha+3\times4^3+3\times4^4+4^5$

$=0+7\alpha+7^2\times6+5\times7^3$

أي $4\beta+16\alpha+1987=7\alpha+2009$

ومنه $9\alpha+4\beta=22$

إذن $(\alpha;\beta)=(4k+2;-9k+1)$

لكن: $0\le\alpha\le3$ $\Rightarrow$ $0\le4k+2\le3$

أي $0\le-9k+1\le3$

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

Scanné avec CamScanner

$$F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}\,dt & ;\ x>0\\ -\ln 2 & ;\ x=0\end{cases}$$ -15

1- الإثبات أن: من أجل كل $x>0$ لدينا:

$$F(x)=\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}\,dt=\int_x^{2x}\frac{1}{t^2}\cdot(1-e^t)\,dt$$

نضع: $\begin{cases}u(t)=1-e^t\\ v'(t)=\frac{1}{t^2}\end{cases}$ ومنه $u'(t)=-e^t$ و $v(t)=-\frac{1}{t}$.

ومنه

$$F(x)=\left[\frac{1-e^t}{-t}\right]_x^{2x}-\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt$$

$$F(x)=\frac{e^{2x}-1}{2x}-\frac{e^x-1}{x}-\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt.$$

ب- التبيان أنه من أجل كل $0<x\le t\le 2x$ لدينا $e^x\le e^t\le e^{2x}$ ومنه $\frac{e^x}{t}\le\frac{e^t}{t}\le\frac{e^{2x}}{t}$

$$\int_x^{2x}\frac{e^x}{t}\,dt\le\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt\le\int_x^{2x}\frac{e^{2x}}{t}\,dt$$ وبالتالي

- $\int_x^{2x}\frac{e^x}{t}=e^x\int_x^{2x}\frac{1}{t}\,dt=e^x\left[\ln t\right]_x^{2x}$ لدينا

$=e^x(\ln 2x-\ln x)$

$=e^x\ln 2$

- $\int_x^{2x}\frac{e^{2x}}{t}=e^{2x}\int_x^{2x}\frac{1}{t}\,dt=e^{2x}\left[\ln t\right]_x^{2x}$ لدينا

$=e^{2x}(\ln 2x-\ln x)=e^{2x}\ln 2$

$g(x)$ إشارة $f'(x)$ وعليه -1ب

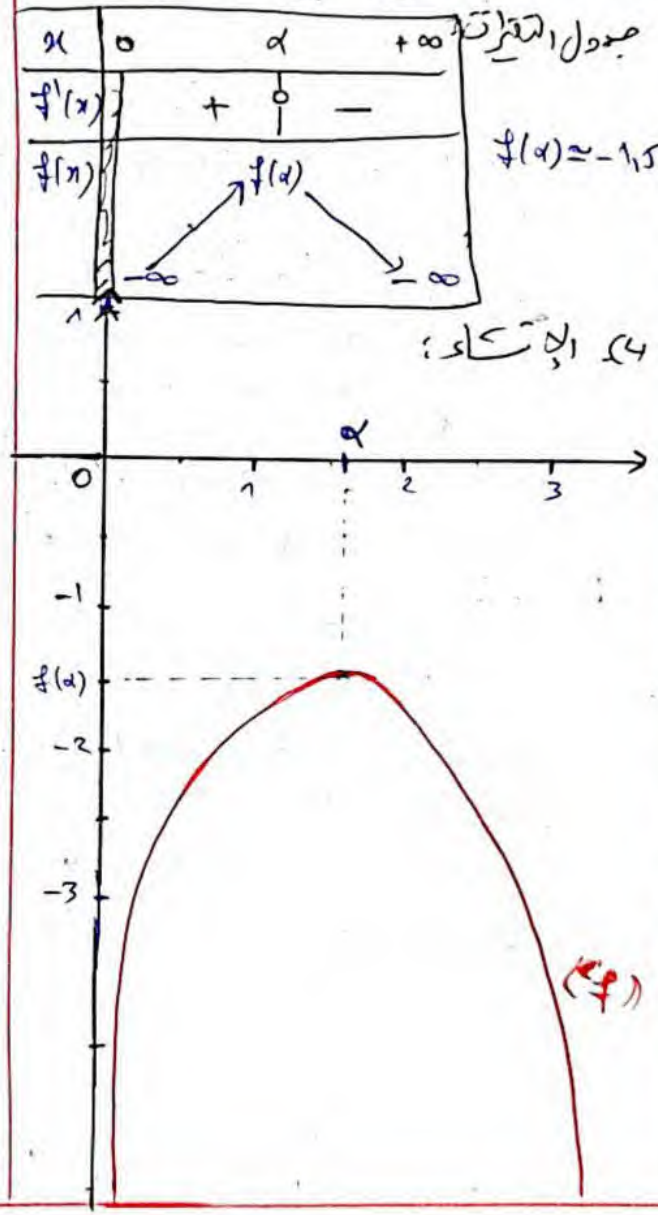
ومنه f متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha]$ و متناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

جدول التغيرات

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

$f(\alpha)\simeq -1,5$

ج- الإنشاء:



جدول تغيرات g

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖	↗	$1-\ln 2$	↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

$g(\ln 2)=1-\ln 2$

أ- الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;\ln 2]$ ومن جدول تغيرات g نجد $g(\ln 2)>0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty<0$

ومنه المجال $]\ln 2;+\infty[$ يتضمن جزءا من المجال $]0;\ln 2]$ ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0;+\infty[$ ومنه g متناقصة تماما على المجال $]\ln 2;+\infty[$

ب- التحقق أن $\ln 4<\alpha<\ln 6$

$g(\ln 4)=\frac{3}{2}-\ln 4>0$

$g(\ln 6)=\frac{5}{3}-\ln 6<0$.

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

جـ- إشارة $g(x)$

3- أ- إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ لدينا: $f'(x)=\frac{e^x}{x^3}g(x)$

$$f'(x)=\frac{-e^x(x^2)-2x(1-e^x)}{(x^2)^2}=\frac{-x^2e^x+2xe^x-2x}{x^4}$$

$$=\frac{-xe^x+2e^x-2}{x^3}$$

$$=\frac{e^x}{x^3}\left(-x+2-2e^{-x}\right)$$

$$=\frac{e^x}{x^3}\left(2(1-e^{-x})-x\right)=\frac{e^x}{x^3}g(x)$$

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

Scanné avec CamScanner