الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية
مجمّع التربية و التعليم الخاص - دار النجاح -

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2024
الشعبة : علوم تجريبيّة — الأستاذ : لقمان بعون
اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل : (4 نقاط)

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة لانميز بينها باللمس، منها : 5 كريات بيضاء مرقمة بـ: 0 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 و4 كريات حمراء مرقمة بـ: -1 ; -2 ; 0 ; 1. وكرية خضراء مرقمة بـ: 2 .
نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريات في آن واحد . أحسب احتمال تحقق الأحداث التالية :

1. A : " الكريات المسحوبة من نفس اللون " B : "من بين الكريات المسحوبة يوجد لونين على الأقل"
C : "جداء ارقام الكريات المسحوبة معدوم " D : "مجموع ارقام الكريات المسحوبة يساوي 3 " .
2. أحسب احتمال الحصول على 3 كريات مجموع أرقامها يساوي 3 علما أنها من نفس اللون .
3. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة العدد $x+\alpha$.
حيث x هو عدد الألوان المتحصل عليها في السحبة الواحدة، α عدد حقيقي .
أ) حدّد قيم المتغير العشوائي X بدلالة α ثم عرف قانون احتماله .
ب) أوجد قيمة α بحيث : $E(X)=\dfrac{40521}{20}$.

التمرين الثاني : (4 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بـ $u_0=e^4-1$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1}=-1+e\sqrt{u_n+1}$.

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n+1>e^2$.
2. أ) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثمّ استنتج أنّها متقاربة .
ب) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1}+1-e^2<\dfrac{1}{2}\left(u_n+1-e^2\right)$.
جـ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $0<u_n+1-e^2<\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\left(e^4-e^2\right)$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.
3. المتتالية (v_n) معرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ : $v_n=-1+\ln(\sqrt{u_n+1})$.
أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسيّة أساسها $q=\frac{1}{2}$ يطلب إيجاد حدّها الأوّل .
ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n . ثمّ تأكّد مرة أخرى من $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

منصة القلم الجزائري | DZPEN.COM

4. أحسب المجموع S حيث : $S = \ln(u_0+1) + \ln(2(u_1+1)) + \cdots + \ln(4048(u_{2024}+1))$

التمرين الثالث : (5 نقاط) إختر الاجابة الصحيحة الوحيدة في كلّ حالة مع التبرير:

1. إذا كان $\int_1^2 f'(x)f''(x)dx = 8$ و $f'(2) - f'(1) = 2$ فإنّ قيمة $f'(2) + f'(1)$ تساوي

أ) 8 ب) 16 ج) 4

2. إذا كان $\theta \in [\frac{-\pi}{2}; 0[$ فإنّ الشكل الأسّي للعدد المركّب $z = 1 - e^{i\theta}$ هو :

أ) $z = 2\cos\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)e^{i(\frac{\pi+\theta}{2})}$ ب) $z = \cos\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)e^{i(\frac{\pi+\theta}{2})}$ ج) $z = 2\cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)e^{i(\frac{\pi+\theta}{2})}$

3. المتتالية العددية (w_n) معرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = 4\times 5^n - 2n + 1$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$

S_n يساوي: أ) $5^{n+1} - (n+1)^2$ ب) $5^{n+1} - n^2$ ج) $5^n - n^2$

4. من بين 8 رجال و 5 نساء إحتمال إختيار لجنة مكوّنة من 5 أعضاء من بينهم رئيس و نائب بحيث يكون الرئيس رجل و النائب إمرأة يساوي أ) $\frac{11}{39}$ ب) $\frac{4}{9}$ ج) $\frac{10}{39}$

5. القيمة المضبوطة للتكامل $\int_0^1 \frac{x}{1+e^{-x^2}}dx$ تساوي أ) $\sqrt{\ln\frac{1+e}{2}}$ ب) $\ln\sqrt{\frac{1+e}{2}}$ ج) $\ln\sqrt{1+e}$.

التمرين الرابع : (7 نقاط)

I. لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = e^{-x} - x + 1$.

1. أدرس اتجاه تغير الدالة g ثمّ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1.2 < \alpha < 1.3$.

2. حدّد حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(-x)$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{xe^x}{1+e^x}$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و فسّر النتيجة بيانيا، ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{e^x g(-x)}{(1+e^x)^2}$

ب) بيّن أنّ الدالّة f متزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$ و متناقصة تماما على $]-\infty;-\alpha]$ ثمّ شكل جدول تغيّراتها .

3. أ) بين أن $y = x$ معادلة لـ (Δ) المستقيم المقارب المائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f) . جـ) بيّن أنّ $f(-\alpha) = 1 - \alpha$ ثمّ جد حصرا للعدد $f(-\alpha)$.

4. أنشئ (Δ) و (C_f) ثمّ ناقش بيانيّا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x) = f(m)$.

5. لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بـ (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين اللّذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = 1$.

بيّن أنّه من أجل كلّ $x \in [0;1]$: $\frac{x}{e+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{xe}{2}$ ثمّ بيّن أنّ $\frac{1}{2(e+1)} \leqslant \mathcal{A} \leqslant \frac{e}{4}$.

إنتهى الموضوع الأوّل

منصة القلم الجزائري | DZPEN.COM

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل : (4 نقاط)

(u_n) متتالية هندسيّة متزايدة تماما ، حدودها موجبة تماما حدّها الأوّل u_0 و أساسها q حيث : $\begin{cases} \ln(u_1)+\ln(u_2)=11 \\ u_1+u_2=e^4(1+e^3) \end{cases}$

1. أحسب u_1 ، u_2 ثمّ استنتج قيمة الأساس q .

نضع فيما يلي : $u_1=e^4$ و $q=e^3$

2. جد u_0 و عبّر عن u_n بدلالة n ، ثمّ أكتب S_n بدلالة n حيث : $S_n=\ln u_0+\ln u_1+\cdots+\ln u_n$.

نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $w_n=2n-3+e^{3n+1}$.

3. تحقق أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $w_n=v_n+u_n$ حيث (v_n) متتالية حسابيّة يطلب تحديد أساسها و حدّها الأوّل .

نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $t_n=w_0+w_1+\cdots+w_n$

4. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $t_n=(n+1)(n-3)+\dfrac{e^{3n+4}-e}{e^3-1}$.

التمرين الثاني : (4 نقاط)

صندوق U_1 يحتوي ثلاث كريات حمراء و كريّتين سوداوين و صندوق U_2 يحتوي على كريّتين حمراوين و ثلاث كريات سوداء . كريّات كلّ كيس متماثلة و لا نفرّق بينها باللّمس .

نختار عشوائيا صندوقا من الصندوقين فإذا كان U_1 نسحب منه كريّتين في آن واحد و إذا كان U_2 نسحب منه كريّتين على التوالي بحيث لا نعيد الكريّة المسحوبة الأولى قبل السحب الموالي . نسمّي الحدث R_i سحب i كريّة حمراء مع $i\in\{0;1;2\}$

1. بيّن أنّ $P_{U_1}(R_1)=\dfrac{3}{5}$.

2. أ) أنقل شجرة الاحتمالات على ورقة إجابتك ثمّ أكملها. أنظر الوثيقة المرفقة

ب) أحسب $P(R_1)$.

جـ) أحسب احتمال الحصول على كريّتين لهما نفس اللّون من U_1 .

3. إذا علمت أنّ الكريّتين المسحوبتين من نفس اللّون ما هو إحتمال أن تكونا من U_1 .

4. نعتبر اللّعبة التالية:في التجربة السابقة يحصل لاعب على 10 نقاط لكلّ كريّة حمراء مسحوبة و يحصل على -7 نقاط لكلّ كريّة سوداء مسحوبة و ليكن المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكلّ إمكانيّة سحب مجموع النقاط المحصّل عليها.

أ) هل اللّعبة في صالح اللّاعب .

ب) أحسب $P\left(\log\left(\frac{X}{2}\right)>0\right)$.

التمرين الثالث : (5 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-(2+\sqrt{2})z+2+\sqrt{2}=0$.

منصة القلم الجزائري | DZPEN.COM

2. ليكن a العدد المركّب المُعرّف بـ : $a = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

أ) بيّن أنّ $|a| = \sqrt{2+\sqrt{2}}$. حيث $|a|$ تمثل طويلة العدد المركب a .

ب) بيّن أنّ $a = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، ثمّ استنتج أنّ $a = 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}$.

3. استنتج قيمة كلّا من $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

4. أ) بيّن أنّ العدد a^{2020} تخيّلي صرف و أنّ a^{2024} حقيقي .

ب) جد أكبر قيمة للعدد الطبيعي n حتى يكون $|a|^n < 2024$.

جـ) جد مجموعة النقط M ذات اللّاحقة z من المستوي التي تحقق $|z-a| = |-8+6i|$.

5. حدّد صورة العدد a بالدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه w ذات اللاحقة $z_w = -2$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

التمرين الرابع : (7 نقاط)

I. لتكن الدالة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = a\ln(x) - \frac{b}{x} + 1$ و (C_g) تمثيلها البياني .

1. إذا علمت أن المنحنى (C_g) يقبل عند النقطة $A(e;2)$ مماسًا معامل توجيهه $3e^{-1}$ بيّن أنّ : $a = 2$ و $b = e$.

2. أدرس تغيّرات الدالة g . ثمّ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1,49;1,51]$.

3. أدرس إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II. نعتبر الدالة f المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{\ln(x) + xe}{x^2}$ ، $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.

1. أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ثمّ فسّر النتائج بيانيّا .

2. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما : $f'(x) = \frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3}$. ثمّ أدرس اتجاه تغيّر f و شكّل جدول تغيّراتها.

3. بيّن أنّ : $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha\left(\frac{e+\alpha}{2}\right)$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

4. بيّن أنّ المنحنى $\left(C_f\right)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $0,3 < x_0 < 0,4$.

5. أنشئ كلّا من $\left(C_f\right)$ و مستقيماته المقاربة .

III. نضع من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $A_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} f(x)dx$; $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln(x)}{x^2}dx$

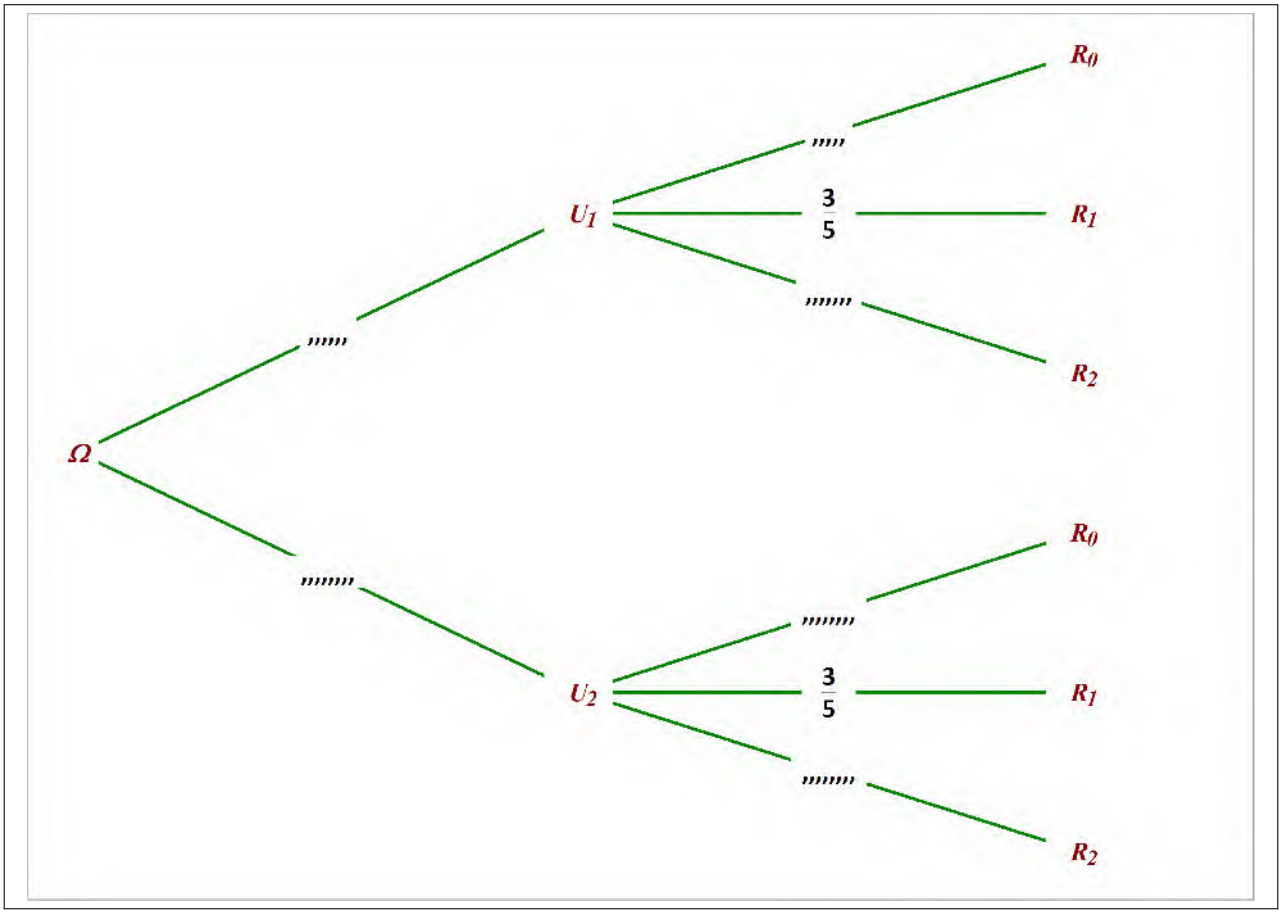
أ) باستعمال التكامل بالتجزئة بيّن أنّ : $I_n = \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}}$. ثمّ بيّن أنّ : $A_n = I_n + e$

ب) أحسب I_0 و A_0 و أعط تفسيرا هندسيا للعدد A_0 . ثمّ بيّن أنّ المتتالية (A_n) متقاربة نحو العدد e .

إنتهى الموضوع الثاني

منصة القلم الجزائري | DZPEN.COM

الوثيقة المرفقة الخاصّة بالتمرين الثاني من الموضوع الثاني



منصة القلم الجزائري | DZPEN.COM