| المستوى:الثالثة علوم تجريبية | ماي 2025 |
|---|---|
| امتحان بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات / | المدة : 3 سا و نصف. |

**على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :**

## الموضوع الأول

**التمرين 1 (5 ن )** لعبة تقتضي سحب 4 كرات في آن واحد من كيس غير شفاف يحتوي على كرة سوداء و تسع كرات بيضاء ثم يتم رمي زهرة نرد متزنة و مرقمة من 1 الى 6.

- إذا كانت الكرة السوداء موجودة في السحب فينبغي الحصول على عدد زوجي لكي نربح.
- إذا لم تكن الكرة السوداء في السحب فينبغي الحصول على الرقم 6 لكي نربح

نعتبر الحادثتين: $N$ " الكرة السوداء موجودة في السحب " $R$ " اللاعب يربح "

**1) أ)** احسب احتمال الحادثة $N$ .

**ب)** شكل شجرة الاحتمالات ثم بين أن $P(R) = \frac{3}{10}$

**2)** لكي نلعب هذه اللعبة ندفع في البداية المبلغ $m$ دينار ( $m$ عدد طبيعي )

- إذا ربح اللاعب يتحصل على $DA$ 4 و إذا لم يربح لكن سحب الكرة السوداء يرد إليه المبلغ $m$ و إذا لم يربح و لم يسحب الكرة السوداء فإنه يخسر المبلغ $m$.

نسمي $X$ المتغير العشوائي الذي يعبر عن الربح الجبري للاعب.

**أ)** عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X$ .

**ب)** عبر بدلالة $m$ الأمل الرياضياتي $E(X)$ .

**جـ )** عين قيمة $m$ التي تكون من اجلها اللعبة عادلة.

**التمرين 2 ( 4 ن )**

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بحدها الأول $u_0 = 2$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = \frac{{u_n}^2}{2u_n - 1}$

$f$ دالة معرفة على المجال $]\frac{1}{2}; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$

**1)** ادرس إتجاه تغير الدالة $f$.

**2) أ)** برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$: $u_n > 1$

**ب)** أدرس إتجاه تغير المتتالية $(u_n)$. ماذا تستنتج ؟

**3)** لتكن $(v_n)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = ln(\frac{u_n - 1}{u_n})$

**أ)** بين أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

**ب)** بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_n = \frac{1}{1-(\frac{1}{2})^{2^n}}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

**4)** أحسب بدلالة $n$ المجموعين $S_n$ و $T_n$ حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

$T_n = ln(e\, u_0 - e) + ln(e\, u_1 - e) \cdots + ln(e\, u_n - e) - ln(u_0) - ln(2\, u_1) - \cdots - ln((n+1)\, u_n)$



منصة القلم الجزائري | DZPEN.COM

**التمرين 3 ( 4 ن )** عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات التالية مع التعليل :

**1)** $Z$ عدد مركب حيث $Z = sin(\frac{\pi}{8}) + i\cos(\frac{\pi}{8})$ ، الشكل المثلثي للعدد المركب $Z$ هو :

أ) $-cos(\frac{\pi}{8}) + i\,sin(\frac{\pi}{8})$ ب) $cos(\frac{\pi}{8}) + i\,sin(\frac{\pi}{8})$ جـ) $cos(\frac{3\pi}{8}) + i\,sin(\frac{3\pi}{8})$

**2)** الشكل الأسي للعدد المركب $\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$ هو : أ) $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{-7\pi}{12}i}$ ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7\pi}{12}i}$ جـ) $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{12}i}$

**3)** الجذرين التربيعين للعدد المركب $3+4i$ هما : أ) $i+3$ و $-3-i$ ب) $i+2$ و $-2-i$ جـ) $i+1$ و $-1-i$

**4)** الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{1+\sqrt{3}+i}{1-i}$ هو : أ) $\frac{\sqrt{3}}{2}+i(\frac{2+\sqrt{3}}{2})$ ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}-i(\frac{2+\sqrt{3}}{2})$ جـ) $\frac{\sqrt{3}}{2}+i(\frac{-2+\sqrt{3}}{2})$

**التمرين 4 ( 7 ن)**

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x-2} + ln(x)$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

**1)** أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا.

**ب)** احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

**2)** أدرس إتجاه تغير الدالة $f$، ثم شكل جدول تغيراتها .

**3)** تسمي ( Γ ) المنحنى البياني للدالة " $ln$ " في المعلم السابق .

أ) أحسب $(f(x) - ln(x))$ $\lim\limits_{x\to+\infty}$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

**ب)** أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة الى المنحنى ( Γ ).

**4)** أرسم ( Γ ) ثم $(C_f)$ .

**5)** $H$ دالة معرفة على $]-\infty;3]$ بـ : $H(x)=\int_3^x ln\,t\,dt$ حيث $t$ متغير حقيقي موجب تماما.

أ) بإستعمال المكاملة بالتجزئة عين عبارة $H(x)$ بدلالة $x$ .

**ب)** أحسب $A$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ و حامل محور الفواصل و المستقيمين الذين معادلاتهما: $x=3$ , $x=4$

**6)** $g$ الدالة المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ : $g(x) = f(-2x)$

ادرس تغيرات الدالة $g$

**انتهى الموضوع الاول**



مـنـصـــة الـقـلـم الـجـزائـــري | DZPEN.COM

## الموضوع الثاني

### التمرين 1 ( 4 ن )

يحتوي كيس على 8 كريات لا نفرق بينها عند اللمس موزعة كما يلي : أربع كريات حمراء مرقمة بـ : 0، 1 ، 1 و 2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 0، 1، 1 و كرية واحدة زرقاء تحمل الرقم 2 .

**1)** نسحب عشوائيا كريتان و في آن واحد . احسب احتمال الحوادث التالية:

$A$ " الكريتان المسحوبتان من لونين مختلفين ". $B$ " الكرتان المسحوبتان تحمل رقمين فرديين " $C$ " سحب كرة حمراء على الأكثر".

**2)** بين أن احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتين تحمل رقمين زوجيين علما أنها من نفس اللون هو $\frac{1}{9}$

**3)** ليكن المتغير العشوائي $X$ الذي يرفق بكل نتيجة سحب القيمة المطلقة للفرق بين الرقمين المحصل عليها.

**أ)** عين قيم المتغير العشوائي $X$ ثم عرف قانون احتماله .

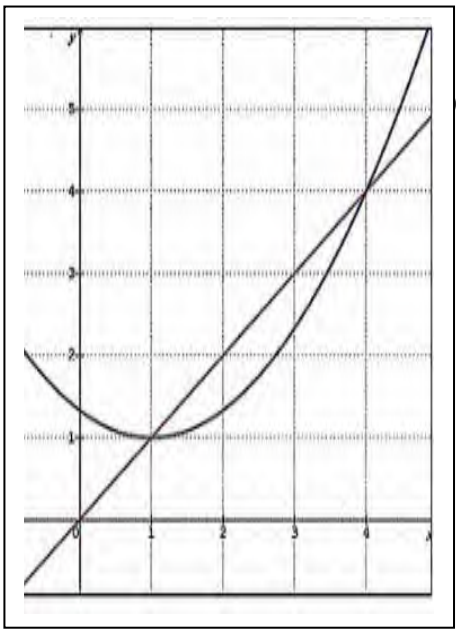
**ب)** احسب احتمال الحادثة $e^X\text{-}1 > 0$

**ج)** أحسب$E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي $X$. ثم عين قيمة α حتى يكون $E(2025X + \alpha) = 1446$

### التمرين 2 ( 4 ن )

**I)** $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1)^2$

$\left(C_f\right)$ التمثيل البياني للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$



نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بـ $u_0 = 3$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1} = f(u_n)$

**1)** أ)انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود $u_0$، $u_1$، $u_2$ و $u_3$ مبرزا خطوط التمثيل

**ب)** ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ و تقاربها

**2)** برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$: $1 \leq u_n \leq 4$

**3)** ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ ، استنتج انها متقاربة ثم احسب نهايتها.

**4)** $(v_n)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = ln(\frac{u_n-1}{3})$

**أ)** اثبت أن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدها الأول .

**ب)** اكتب $v_n$ بدلالة $n$، ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي $n$، $u_n = 3e^{2^n ln(\frac{2}{3})} + 1$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

**5)** نضع من اجل كل عدد طبيعي $n$ $T_n = \frac{(u_0-1)\times(u_1-1)\times\ldots\times(u_n-1)}{3^n}$ بين أن: $T_n = 3e^{(2^{n+1}-1)ln(\frac{2}{3})}$

### التمرين 3 ( 5 ن )

**I)** حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $Z$ : $(\overline{Z} - 2 + 2i)(Z^2 - 4Z + 16) = 0$

**II)** في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط $A$، $B$ و $C$ لواحقها على الترتيب :



DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

$Z_A = 2 + 2i$ ، $Z_B = 2\sqrt{3} - 2i$ ، $Z_C = \overline{Z_B}$

**1)** اكتب الأعداد $Z_A$، $Z_B$ و $Z_C$ على الشكل الأسي .

**2) أ)** اكتب العدد المركب $\frac{Z_A}{Z_B}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\sin(\frac{5\pi}{12})$ و $\cos(\frac{5\pi}{12})$

**3)** اكتب العدد المركب $\frac{Z_A - Z_C}{Z_B - Z_C}$ على الشكل الأسي .ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$

**4) أ)** اوجد قيم العدد الطبيعي $n$ حتى يكون $(\frac{Z_B}{Z_C})^n$ حقيقيا سالبا.

**ب)** تحقق أن: $(\frac{Z_B}{Z_C})^{2024} + (\frac{Z_C}{4})^{2006} = 0$

**5)** عين $Z_G$ لاحقة $G$ مركز الدائرة المحيطة بالمثلث $ABC$

**6) أ)** عين $(E_1)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12$

**ب)** عين $(E_2)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ التي تحقق :$|\overline{Z} - 2\sqrt{3} + 2i| = |iz + 2 - 2i|$

## التمرين 4 (7 ن )

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = 2x + \frac{1}{e^x - 1}$

$(C_f)$ التمثيل البياني للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$ .

**1) أ)** أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

**ب)** أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا

**2) أ)** احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - 2x)$ ثم فسر النتيجتين بيانيا

**ب)** أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ و المستقيمين $(\Delta_1): y = 2x$ و $(\Delta_2): y = 2x - 1$

**3) أ)** بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R}^*$ : $f'(x) = \frac{(2e^x - 1)(e^x - 2)}{(e^x - 1)^2}$

**ب)** استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

**4)** من اجل كل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R}^*$ احسب $f(-x) + f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

**5)** أرسم $(\Delta_1)$ $(\Delta_2)$ و $(C_f)$.( يعطى $f(-ln2) = -ln4 - 2$ و $f(\ln 2) = ln4 + 1$ )

**6)** ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ ، عدد و اشارة حلول المعادلة : $\frac{1}{e^x - 1} - m = 0$

**7) أ)** بين ان الدالة $x \mapsto -x + ln(e^x - 1)$ هي دالة اصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{e^x - 1}$ على المجال $]0 ; +\infty[$

**ب)** أحسب $\int_{ln2}^{1} \frac{dx}{e^x - 1}$ و فسر النتيجة بيانيا

**8)** $h$ دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $h(x) = |f(x)|$

اشرح كيفية رسم منحنى الدالة $h$ انطلاقا من $(C_f)$ ثم ارسمه في نفس المعلم

**انتهى الموضوع الثاني**



**☺ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ☺**

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

# التصحيح النموذجي

## الموضوع الاول

**تمرين 1**

**1)** أ) $P(N) = \frac{2}{5}$ .

**ب)** شجرة الاحتمالات

$$P(R) = \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{6}\right) = \frac{3}{10}$$

**أ)** قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X$ .

$X = \{ 4\text{-}m \; ; \; \text{-}m \; ; \; 0 \}$

| $X=x_i$ | $4\text{-}m$ | $\text{-}m$ | $0$ |
|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{5}$ |

**ب)** $E(X) = \frac{12-8m}{10}$ .

**جـ)** قيمة $m$ التي تكون من اجلها اللعبة عادلة. $m=\frac{3}{2}$

**تمرين 2**

**1)** $f$ دالة متزايدة تماما على $[1 \; ; +\infty[$ و متناقصة تماما عل المجال $]\frac{1}{2} ; 1]$

**2)** أ) البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n > 1$

**ب)** أدرس إتجاه تغير المتتالية $(u_n)$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-u_n)}{2u_n - 1}$$

و منه $u_{n+1} - u_n < 0$ إذن المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

نستنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة

3)أ) $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q= 2$ و حدها الأول $v_0 = ln\frac{1}{2}$ .

إذن $v_n = ln\frac{1}{2} \times 2^n$ و منه $v_n = ln(\frac{1}{2})^{2^n}$

**ب)** نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n = \frac{1}{1-(\frac{1}{2})^{2^n}}$

لدينا $u_n = \frac{1}{1-e^{v_n}}$ إذن $u_n = \frac{1}{1-(\frac{1}{2})^{2^n}}$

ثم استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

**4)** حساب بدلالة $n$ المجموعين $S_n$ و $T_n$ :

$$S_n = ln\,2\,(1-(2)^{n+1})$$

$$T_n = (n+1) - ln\,(n+1)! + ln\,2\,(1-(2)^{n+1})$$

**التمرين 3 ( 4 ن):**

**1)** $Z$ عدد مركب حيث $Z = sin(\frac{\pi}{8}) + i\cos(\frac{\pi}{8})$ ، الشكل المثلثي للعدد المركب $Z$ هو : جـ) $cos(\frac{3\pi}{8}) + i\,sin(\frac{3\pi}{8})$

**2)** الشكل الأسي للعدد المركب $\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$ هو : أ) $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{-7\pi}{12}i}$

**3)** الجذرين التربيعين للعدد المركب $3+4i$ هما : ب) $2+i$ و $-2-i$

**4)** الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{1+\sqrt{3}+i}{1-i}$ هو : أ) $\frac{\sqrt{3}}{2}+i(\frac{2+\sqrt{3}}{2})$

**التمرين 4 ( 7 ن):**

**1)** أ) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=$ -∞

تفسير النتائج بيانيا.

$(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين عموديين معادلتهما $x=0$ و $x=2$

**ب)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

**2)** إتجاه تغير الدالة $f$. حساب $f'(x)=\frac{x^2-5x+4}{x(x-2)^2}$

إشارة $f'(x)$ :

| $x$ | 0 | | 1 | | 2 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | + | 0 | - | ‖ | - | 0 | + | |

و منه $f$ دالة متزايدة تماما على المجالين $[1\ ;\ 0\ [$ و $]\infty+;\ 4]$

و متناقصة تماما على المجالين $]2;\ 1]$ و $[4\ ;\ 2\ ]$

جدول التغيرات

| $x$ | 0 | | 1 | | 2 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | + | 0 | - | ‖ | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | ‖ -∞ | ↗ | -1 | ↘ -∞ | ‖ +∞ | ↘ | $\frac{1}{2}+ln\ 2$ | ↗ | +∞ |

أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ln(x))=0$

تفسير النتيجة بيانيا.

المنحنيين $(C_f)$ و ( Γ ) متقاربان عند ∞ +

**ب)** وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة الى المنحنى ( Γ ).

$(C_f)$ يقع تحت ( Γ ) على المجال $]0\ ;\ 2[$

$(C_f)$ يقع فوق( Γ ) على المجال $]2\ ;\ +\infty[$

**4)** رسم ( Γ ) ثم $(C_f)$ .

5) **أ)** بإستعمال المكاملة بالتجزئة تعيين عبارة $H(x)$ بدلالة $x$ .

$H(x)=x\ ln\ x - x - 3\ ln 3 + 3$

**ب)** أحسب $A$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ و حامل محور الفواصل و المستقيمين الذين معادلاتهما:

$x = 4$ , $x=3$

$$\boldsymbol{A} = \int_3^4 f(x)d\,x = (9\ ln\ 2 - 3\ ln 3 - 1)\ u\ a$$

6) تغيرات الدالة $g$

النهايات $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0} g(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-1} g(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-1} g(x) = +\infty$ ،

اتجاه تغير الدالة $f$، ثم شكل جدول تغيراتها .

حساب $g'(x) = -2f'(-2\,x)$

إشارة $g'(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $\frac{-1}{2}$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ |

و منه $g$ دالة متناقصة تماما على المجالين $]-\infty\ ;\ -2[$ و $]\frac{-1}{2};0[$

و متزايدة تماما على المجالين $]-2\ ;\ -1[$ و $]-1\ ;\ \frac{-1}{2}[$

جدول التغيرات

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $\frac{-1}{2}$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $\frac{1}{2}+2ln\,2$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | **-1** | ↘ | ‖ **-∞** |

## الموضوع الثاني

### تمرين1

**1)**

$$p(A)=\frac{C_4^1C_1^1+C_3^1C_1^1+C_3^1C_4^1}{C_8^2}=\boxed{\frac{19}{28}}$$

$$p(B)=\frac{C_4^2}{C_8^2}=\boxed{\frac{6}{28}}$$

$$p(C)=\frac{C_4^2+C_4^1C_4^1}{C_8^2}=\boxed{\frac{22}{28}}$$

**2)** نبين أن احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتين تحمل رقمين زوجيين علما أنها من نفس اللون هو $\frac{1}{9}$

$$p_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{p(\overline{A}\cap\overline{B})}{p(\overline{A})}=\frac{\frac{C_2^2}{C_8^2}}{1-p(A)}=\frac{\frac{1}{28}}{1-\frac{19}{28}}=\boxed{\frac{1}{9}}$$

**3) أ)** قيم المتغير العشوائي $X$ ثم قانون احتماله .

$X=\{0\ ;\ 1;\ 2\}$

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p(X=x_i)$ | $\frac{8}{28}$ | $\frac{16}{28}$ | $\frac{4}{28}$ |

**ب)** $P(e^X\text{-}1\ >0\ )=\frac{20}{28}$

**ج)** الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي $X$.

$E(X)=\frac{6}{7}$

قيمة α حتى يكون $E(2025X+\alpha)=1446$

$\alpha=-\frac{2028}{7}$

### التمرين 2

**1) أ)** التمثيل على حامل محور الفواصل الحدود $u_0$، $u_1$، $u_2$ و $u_3$

**ب)** التخمين حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ و تقاربها

المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما و متقاربة.

**2)** البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$: $1\leq u_n\leq 4$

**3)** اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$

من اجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا :

$$U_{n+1}-U_n=\frac{1}{3}(U_n-1)^2+1-U_n=\frac{U_n^2-5U_n+4}{3}=\frac{1}{3}(U_n-1)(U_n-4)$$

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

لدينا $4 \le U_n \le 1$ ومنه $(U_n - 1)(U_n - 4) \le 0$ أي $U_{n+1} - U_n \le 0$ ومنه المتتالية $(U_n)$ متناقصة.

المتتالية $(U_n)$ متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 وبالتالي فهي متقاربة ،

وبالتالي يوجد عدد حقيقي $L$ بحيث $\lim_{n \to +\infty} U_n = L$ وهو حل للمعادلة $f(x) = x$ أي $\frac{1}{3}(L-1)^2 + 1 = L$

ومنه $\frac{1}{3}(L-1)(L-4) = 0$ ومنه إما $L = 1$ او $L = 4$ لأن المتتالية متناقصة و $U_0 = 3$

وبالتالي $\lim_{n \to +\infty} U_n = 1$ .

**4) أ)** إثبات أن $(v_n)$ متتالية هندسية مع تعيين أساسها و حدها الأول .

1- لدينا $V_{n+1} = \ln\left(\frac{U_{n+1}-1}{3}\right) = \ln\left[\left(\frac{U_n - 1}{3}\right)^2\right] = 2\ln\left(\frac{U_n - 1}{3}\right) = 2V_n$

ومنه المتتالية $(V_n)$ هندسية أساسها 2 و حدها الأول $V_0$ حيث $V_0 = \ln\left(\frac{u_0 - 1}{3}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ .

**ب)** كتابة $v_n$ بدلالة $n$ ، ثم استنتاج انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n = 3e^{2^n ln(\frac{2}{3})}$ ثم حساب $\lim_{n \to +\infty} u_n$

لدينا $V_n = V_0 \times q^n = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \times 2^n$ ولدينا : $U_n = 3e^{V_n} + 1$ ومنه $U_n = 3e^{2^n \ln\left(\frac{2}{3}\right)} + 1$ .

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} 3e^{2^n \ln\left(\frac{2}{3}\right)} + 1 = 1$$

**5)** نضع من اجل كل عدد طبيعي $n$ $T_n = \frac{(u_0-1)(u_1-1)\ldots(u_n-1)}{3}$ نبين أن: $T_n = 3e^{2^{(n+1)} ln(\frac{2}{3})}$

$$W_n = \frac{(U_0-1)(U_1-1)(U_2-1)\times\ldots\ldots\times(U_n-1)}{3^n}$$

$$= \frac{\left(3\times e^{2^0 \ln\left(\frac{2}{3}\right)}\right)\left(3\times e^{2^1 \ln\left(\frac{2}{3}\right)}\right)\left(3\times e^{2^2 \ln\left(\frac{2}{3}\right)}\right)\times\ldots\ldots\times\left(3\times e^{2^n \ln\left(\frac{2}{3}\right)}\right)}{3^n}$$

$$= \frac{3^{n+1} \times e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)(2^0+2^1+\ldots+2^n)}}{3^n}$$

$$= 3e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)(2^{n+1}-1)}$$

ومنه : $\lim_{n \to +\infty} W_n = \lim_{n \to +\infty} 3e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)(2^{n+1}-1)} = 0$

## التمرين 3

**I)** حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(\overline{Z} - 2 + 2i)(Z^2 - 4Z + 16) = 0$

$S = \{2+2i\ ;\ 2+2\sqrt{3}i;\ 2-2\sqrt{3}i\}$

**(II**

**1)** كتابة العددان $Z_A$ و $Z_B$ على الشكل الأسي .

$Z_A = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ ; $Z_B = 4e^{-\frac{\pi}{6}i}$

**2)** أ) كتابة العدد المركب $\frac{Z_A}{Z_B}$ على الشكل الجبري

$$\frac{Z_A}{Z_B} = \frac{\sqrt{3}-1}{4} + i\frac{\sqrt{3}+1}{4}$$

استنتاج القيمة المضبوط لكل من $sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

$$sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

**3)**كتابة العدد المركب $\frac{Z_A-Z_C}{Z_B-Z_C}$ على الشكل الأسي

$$\frac{Z_A - Z_C}{Z_B - Z_C} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$$

. طبيعة المثلث $ABC$ قائم في $C$

**4)** أ) قيم العدد الطبيعي $n$ حتى يكون $\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا.

$n = -3 - 6k \quad ; k \in \mathbb{Z}_-$

**ب)** التحقق أن: $\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right)^{2024} + \left(\frac{Z_C}{4}\right)^{2006} = 0$

**5)** عين $Z_G$ لاحقة $G$ مركز الدائرة المحيطة بالمثلث $ABC$

$$Z_G = 1 + \sqrt{3}$$

**6)** أ) $(E_1)$ هي الدائرة التي مركزها $G$ و نصف قطرها $r = 4$

**ب)** $(E_2)$ هي محور القطعة المستقيمة $[AC]$

**<u>التمرين 4 (7 ن )</u>**

**2)** أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

**3)**

**ب)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$

$(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=0$

**2)** أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-2x+1) = 0$

$(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين معادلتهما $y=2x$ و $y=2x-1$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب

**ب)** الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ و المستقيم $(\Delta_1): y = 2x$

- على المجال $]-\infty\ ;\ 0[$ : $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta_1)$
- على المجال $]\ 0\ ;+\infty[$ : $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta_1)$

الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ و المستقيم $(\Delta_2): y = 2x - 1$

- على المجال $]-\infty\ ;\ 0[$ : $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta_1)$
- على المجال $]\ 0\ ;+\infty[$ : $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta_1)$

**3)** أ) نبين انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R}^*$ : $f'(x) = \frac{(2e^x-1)(e^x-2)}{(e^x-1)^2}$

**ب)** استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

- إشارة $f'(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | $-ln\ 2$ | $0$ | $ln\ 2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+\ 0$ | $-$ | $-\ 0$ | $+$ |

و منه $f$ دالة متزايدة تماما على المجالين $]-\infty\ ;\ -ln\ 2]$ و $[ln\ 2\ ;\ +\infty[$

و متناقصة تماما على المجالين $]-ln\ 2;0[$ و $]0\ ;\ ln\ 2[$

- جدول التغيرات

| $x$ | $-\infty$ | $-ln\ 2$ | $0$ | $ln\ 2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+\ 0$ | $-$ | $-\ 0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $-2-ln4$ | $-\infty$ | $+\infty$ $1+ln\ 4$ | $+\infty$ |

**4)** من اجل كل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R}^*$

حساب $f(-x)+f(x)=$ -1

تفسير النتيجة بيانيا.

النقطة $(-\frac{1}{2}\ ;\ 0)$ مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$

**5)** انشاء $(\Delta_1)$ $(\Delta_2)$ و $(C_f)$. (يعطى $f(-ln2)=-ln4-2$ و $f(\ln 2)=ln4+1$ )

**6)** المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ ، عدد و اشارة حلول المعادلة : $\frac{1}{e^x-1}-m=0$

لدينا $\frac{1}{e^x-1}-m=0$ و منه $f(x)=2x+m$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع $(C_f)$ و المستقيم ذو المعادلة $y=2x+m$

- لما $m\in]-\infty;-1[$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا
- لما $m\in[-1;1]$ فإن المعادلة لا تقبل حلول.
- لما $m\in]1\ ;+\infty[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا.

**7) أ)** نبين ان الدالة $x\mapsto -x+ln(e^x-1)$ هي دالة اصلية للدالة $x\mapsto \frac{1}{e^x-1}$

$[-x+ln(e^x-1)]'=\frac{1}{e^x-1}$

**ب)** $\int_{ln2}^{1}\frac{dx}{e^x-1}=$ -1+ $ln(\ 2e-2)$

تفسير النتيجة بيانيا

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

تمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ و حامل محور الفواصل و المستقيمين $x=1$ و $x= ln2$

**8)** كيفية رسم منحنى الدالة $h$ انطلاقا من $\left(C_f\right)$

لما $x \in ]0\ ;\ +\infty[$ منحنى الدالة $h$ ينطبق على $(C_f)$

لما $x \in ]-\infty;\ 0[$ منحنى الدالة $h$ نظير الجزء الغير منطبق بالنسبة إلى محور الفواصل