➢ التمرين الأول (04 نقاط) :

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية، مع التبرير:

1) نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالشكل : $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-3e^{x}+2$

على المجال $[0;\ln 2]$ ، الدالة f :

أ) متناقصة تماما ، ب) متزايدة تماما ، جـ) غير رتيبة

2) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=\cos x$ ، القيمة المتوسطة m للدالة g على المجال $\left[\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right]$ تساوي :

أ) $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ ، ب) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ ، جـ) $-\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$

3) لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها 2 و حدها الأول u_0 ، حيث : $u_0=1$

من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n=e^{u_0}\times e^{u_1}\times\ldots\times e^{u_n}$

S_n يساوي : أ) $e^{2(n+1)}$ ، ب) $e^{(n+1)^2}$ ، جـ) e^{n^2+1}

4) يحتوي وعاء على 6كريات سوداء و4 كريات بيضاء ، نسحب منه 5 كريات على التوالي مع الإرجاع

احتمال الحدث A : "سحب 3 كريات سوداء و كريتين بيضاوين " ، هو :

أ) $P(A)=\frac{10}{21}$ ، ب) $P(A)=\frac{1}{21}$ ، جـ) $P(A)=\frac{216}{625}$

➢ التمرين الثاني(05 نقاط) :

(u_n) متتالية عددية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 بحيث :

$u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=\frac{u_n-1}{u_n+3}$

1) عين العددان الحقيقيان a و b بحيث من اجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=a+\frac{b}{u_n+3}$

2) برهن بالتراجع ،انه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1<u_n\leq 0$

3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)، ثم استنتج أن (u_n) متقاربة

4) (v_n) متتالية معرفة في المجموعة $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\frac{1}{u_n+1}$

أ. بين أن (v_n) متتالية حسابية ،عين أساسها و حدها الأول

ب. عين v_n ثم u_n بدلالة n ، استنتج ثانية أن (u_n) متقاربة

5) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=u_0v_0+u_1v_1+\ldots+u_nv_n$ و $T_n=e^{\frac{u_0}{u_0+1}}\times e^{\frac{u_1}{u_1+1}}\times\ldots\times e^{\frac{u_n}{u_n+1}}$

عين S_n و T_n بدلالة n ، هل المتتالية (T_n) متقاربة؟ برر إجابتك

➢ التمرين الثالث(04 نقاط) :

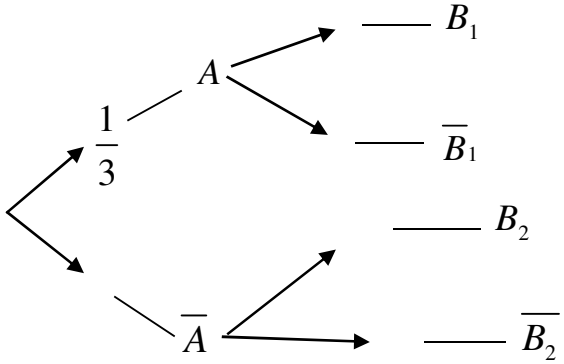
(I) نعتبر وعاء U_1 يضم 6كريات مرقمة كما يلي 1 ، 1 ، 1 ، 3 ، 3 و 4،وعاء U_2 يضم 4 كريات مرقمة1 ، 2 ، 3 و 4

نسحب من علبة تضم 6 بطاقات مرقمة من 1 إلى 6 ،بطاقة واحدة إذا ظهر الرقم 3 أو 5 نسحب كرية واحدة من الوعاء U_1 أما إذا ظهر رقم آخر فإننا نسحب كرية واحدة من الوعاء U_2

(الكريات متماثلة لا نميز بينها باللمس)

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

نعتبر الاحداث : A : "اختيار العلبة U_1" ، B_1 : "سحب كرية تحمل الرقم 1 من العلبة U_1"
و B_2 : "سحب كرية تحمل الرقم 1 من العلبة U_2"



1) أنقل و أكمل شجرة الاحتمالات

2) أحسب احتمال الحدث B : "سحب كرية تحمل الرقم 1"

(II) نجمع الآن الكريات في وعاء واحد U_3

نسحب عشوائيا من الوعاء U_3 ثلاث كريات في آن واحد

1) أحسب احتمال الحصول على

أ- الكريات الثلاث تحمل أرقام فردية

ب- كرية على الأقل من الكريات الثلاث تحمل رقما فرديا

جـ- كرية على الأكثر من الكريات الثلاث تحمل رقما فرديا

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب، عدد الكريات التي تحمل الرقم1

عين قانون المتغير العشوائي X ، ثم أحسب $E(1900X-1965)$

➢ التمرين الرابع(07 نقاط):

(I) g هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x^2+3-2\ln x$

1) ادرس تغييرات الدالة g.

2) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

(II) f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{x^2-1}{2x}$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $f'(x)=\frac{g(x)}{2x^2}$، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

2) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ ، فسر النتيجة المحصل عليها هندسيا

3) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f

4) ليكن (D) المستقيم الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x$

أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب. أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (D)

5) **أ.** أنشئ المستقيم (D) والمنحنى (C_f).

ب. أحسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y=\frac{x}{2}$ ، $x=1$ ، $x=e$

6) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1-x^2}{|x|}-\frac{\ln x^2}{|x|}\right]$ ، نسمي (C_h) المنحني الممثل لها

أ.بين أن h دالة زوجية

ب. اشرح كيفية رسم المنحني (C_h) ، أرسم (C_h) في المعلم السابق .

انتهى

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

✓ التمرين الأول :

1) الاقتراح الصحيح هو أ) ، لأن :

الدّالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{2x}-3e^{x}$ أي أن $f'(x)=e^{x}\left(e^{x}-3\right)$

وبما أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^{x}>0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة الدالة $e^{x}-3$ ، وعليه :

$f'(x)\geq 0$ تكافئ $e^{x}-3\geq 0$ ومنه $f'(x)\geq 0$ تكافئ $e^{x}\geq 3$ أي أن $f'(x)\geq 0$ تكافئ $x\geq \ln 3$

نستنتج أن $f'(x)<0$ تكافئ $x<\ln 3$ ، وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;\ln 3[$ و بما أن $[0;\ln 2]$ محتوى في $]-\infty;\ln 3[$ فإن الدالة f متناقصة تماما على $[0;\ln 2]$

2) الاقتراح الصحيح هو جـ) ، لأن :

$$m=\frac{1}{\frac{4\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}g(x)\,dx \text{ ومنه } m=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\cos x\,dx \text{ إذن } m=\frac{3}{2\pi}\left[\sin x\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \text{ وعليه } m=\frac{3}{2\pi}\left[\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

ينتج أن $m=\frac{-3\sqrt{3}}{2\pi}$

3) الاقتراح الصحيح هو ب) ، لأن :

من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=e^{u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n}$ وبما أن المتتالية (u_n) حسابية فإن

$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n=\frac{n+1}{2}(u_0+u_n)$ وبما أن $u_0=1$ و $u_n=1+2n$ فإن $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n=\frac{n+1}{2}(2+2n)$

أي أن $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n=(n+1)^2$ و بالتالي $S_n=e^{(n+1)^2}$

4) الاقتراح الصحيح هو جـ) ، لأن :

بما أن السحب يتم على التوالي مع الإرجاع فإننا نوظف قوائم و عليه :

- عدد الحالات الممكنة هي 10^5 : عدد الحالات المواتية للحدث A هي $\left(6^3\times 4^2\right)\times C_5^3\times C_2^2=34560$

ينتج أن : $P(A)=\frac{34650}{100000}=\frac{216}{625}$

✓ التمرين الثاني :

1) من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=\frac{a(u_n+3)+b}{u_n+3}=\frac{au_n+3a+b}{u_n+3}$ و بما أن $u_{n+1}=\frac{u_n-1}{u_n+3}$

فإن $a=1$ و $3a+b=-1$ ومنه $a=1$ و $b=-4$ ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=1-\frac{4}{u_n+3}$

طريقة ثانية :

من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=\frac{u_n+3-4}{u_n+3}$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=\frac{u_n+3}{u_n+3}-\frac{4}{u_n+3}$

ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=1-\frac{4}{u_n+3}$

2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $-1<u_n\leq 0$:

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

أ.من أجل $n=0$: $-1<u_0\leq 0$ محققة لأن $u_0=0$

ب.ليكن n عدد طبيعي كيفي، لنفرض أن $-1<u_n\leq 0$ و لنبرهن $-1<u_{n+1}\leq 0$

بما أن فرضا $-1<u_n\leq 0$ فإن $2<u_n+3\leq 3$ ومنه $\frac{1}{2}<\frac{1}{u_n+3}\leq\frac{1}{3}$ إذن $2>\frac{4}{u_n+3}\geq\frac{4}{3}$ ينتج أن

$-2<-\frac{4}{u_n+3}\leq-\frac{4}{3}$ وعليه $-1<1-\frac{4}{u_n+3}\leq-\frac{1}{3}$ و بما أن $u_{n+1}=1-\frac{4}{u_n+3}$ فإن $-1<u_{n+1}\leq-\frac{1}{3}$ أي أن

$-1<u_{n+1}\leq 0$. من أ. و ب. ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $-1<u_n\leq 0$

3) دراسة اتجاه تغير المتتالية العددية (u_n) :

ليكن n عدد طبيعي، لدينا: $u_{n+1}-u_n=1-\frac{4}{u_n+3}-u_n$ ومنه $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2-2u_n-1}{u_n+3}$

إذن $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n+1)^2}{u_n+3}$. بما أن $2<u_n+3\leq 3$ فإن $u_n+3>0$ و $-(u_n+1)^2<0$

وعليه $u_{n+1}-u_n<0$ ينتج أن (u_n) متناقصة تماما

- استنتاج أن (u_n) متقاربة: بما أن (u_n) متناقصة تماما و محدودة من أسفل بالعدد -1 فإنها متقاربة

4) أ. نبين أن (v_n) متتالية حسابية:

ليكن n عدد طبيعي، لدينا: $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}+1}-\frac{1}{u_n+1}$ و بما أن $u_{n+1}+1=2-\frac{4}{u_n+3}=\frac{2u_n+2}{u_n+3}$

فإن $\frac{1}{u_{n+1}+1}=\frac{u_n+3}{2(u_n+1)}$ ومنه $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3}{2(u_n+1)}-\frac{1}{u_n+1}$ ينتج أن $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3}{2(u_n+1)}-\frac{2}{2(u_n+1)}$

وعليه $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+1}{2(u_n+1)}$ أي أن $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{2}$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=\frac{1}{u_0+1}=1$

ب.تعيين v_n ثم u_n بدلالة n :

- بما أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=1$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n=1+\frac{1}{2}n$
- بما أن $v_n=\frac{1}{u_n+1}$ فإن $u_n+1=\frac{1}{v_n}$ ومنه $u_n=\frac{1}{v_n}-1$ و بما أن $v_n=\frac{n+2}{2}$ فإن $u_n=\frac{2}{n+2}-1=\frac{-n}{n+2}$
- استنتاج ثانية أن (u_n) متقاربة :

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-n}{n}=-1$ فإن المتتالية (u_n) متقاربة

5) أ. حساب S_n بدلالة n : لدينا $S_n=u_0v_0+u_1v_1+\ldots+u_nv_n$.

لنضع $u_nv_n=\omega_n$ ، نجد $S_n=\omega_0+\omega_1+\ldots+\omega_n$

بما أن $u_n=\frac{1}{v_n}-1$ فإن $\omega_n=1-v_n$ ومنه $S_n=1-v_0+1-v_1+\ldots+1-v_n$

إذن $S_n=(1+1+\ldots+1)-(v_0+v_1+\ldots+v_n)$ ومنه $S_n=(n+1)-S_n^{'}$ مع $S_n^{'}=v_0+v_1+\ldots+v_n$

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

إن S'_n هومجموع $n+1$ حد متتابع من المتتالية الحسابية (v_n) وعليه $S'_n=\frac{n+1}{2}(v_0+v_n)$ ومنه $S'_n=\frac{n+1}{2}\left(2+\frac{1}{2}n\right)$

ينتج أن $S_n=(n+1)-\frac{(n+1)(n+4)}{4}$ أي أن $S_n=\frac{-n(n+1)}{4}$

ب. حساب T_n بدلالة n :

لدينا $\frac{u_n}{u_n+1}=\frac{u_n+1-1}{u_n+1}$ ومنه $\frac{u_n}{u_n+1}=1-\frac{1}{u_n+1}$ وبما أن $u_n+1=\frac{1}{v_n}$ فإن $v_n=\frac{1}{u_n+1}$

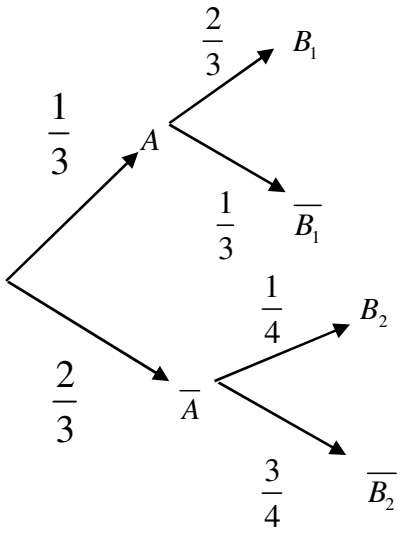
ومنه $\frac{u_n}{u_n+1}=1-v_n$ أي أن $\frac{u_n}{u_n+1}=\omega_n$ و عليه $T_n=e^{\omega_0}\times e^{\omega_1}\times\ldots\times e^{\omega_n}$ ومنه $T_n=e^{\omega_0+\omega_1+\ldots+\omega_n}$

إذن $T_n=e^{S_n}$ أي أن $T_n=e^{\frac{-n(n+1)}{4}}$

- المتتالية (T_n) متقاربة لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

✓ **التمرين الثالث:** (I)

1) نقل و إكمال شجرة الاحتمالات :



2) حساب $p(B)$ احتمال الحدث B : حسب دستور الاحتمالات الكلية فإن $p(B)=p(A\cap B_1)+p\left(\overline{A}\cap B_2\right)$

إذن $p(B)=p(A)\times p_A(B_1)+p\left(\overline{A}\right)\times p_{\overline{A}}(B_2)$ ومنه $p(B)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{18}$

(II) بما أن السحب يتم في آن واحد فإننا نوظف توفيقات

عدد السحبات الكلية هو $C_{10}^3=120$

1) أ . عدد الحالات المواتية للحدث A_1 هو $C_7^3=35$ ومنه $p(A_1)=\frac{35}{120}$ أي أن $p(A_1)=\frac{7}{24}$

ب. عدد الحالات المواتية للحدث A_2 هو $\left(C_7^1\times C_3^2\right)+\left(C_7^2\times C_3^1\right)+C_7^3=119$ ومنه $p(A_2)=\frac{119}{120}$

<u>طريقة ثانية</u>: الحدث A_2 هو الحدث المعاكس للحدث $\overline{A_2}$: الكرات الثلاثة لا تحمل رقما فرديا

عدد الحالات المواتية للحدث $\overline{A_2}$ هو $C_3^3=1$ ومنه $p\left(\overline{A_2}\right)=\frac{1}{120}$ إذن $p(A_2)=1-p\left(\overline{A_2}\right)=\frac{119}{120}$

جـ. عدد الحالات المواتية للحدث A_3 هو $\left(C_7^1\times C_3^2\right)+C_3^3=22$ ومنه $p(A_3)=\frac{22}{120}$ أي أن $p(A_3)=\frac{11}{60}$

2) أ. قيم المتغير العشوائي X هي : 0 ، 1 ، 2 و 3

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

ب. قانون المتغير العشوائي X : $p(X=0)=\frac{C_3^3}{120}$ أي أن $p(X=0)=\frac{1}{120}$

$p(X=1)=\frac{C_7^1\times C_3^2}{120}$ أي أن $p(X=1)=\frac{21}{120}=\frac{7}{40}$

$p(X=2)=\frac{C_7^2\times C_3^1}{120}$ أي أن $p(X=2)=\frac{63}{120}=\frac{21}{40}$

$p(X=3)=\frac{C_7^3}{120}$ أي أن $p(X=3)=\frac{35}{120}=\frac{7}{24}$

$(X=x_i)$	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{120}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{24}$

جـ . حساب $E(1900X-1965)$: لدينا $E(1900X-1965)=1900E(X)-1965$

لنحسب $E(X)$: لدينا $E(X)=\left(0\times\frac{1}{120}\right)+\left(1\times\frac{7}{40}\right)+\left(2\times\frac{21}{40}\right)+\left(3\times\frac{7}{24}\right)$ ومنه $E(X)=\frac{21}{10}$

ينتج أن $E(1900X-1965)=1900\times\frac{21}{10}-1965$ ومنه $E(1900X-1965)=2025$

✓ **التمرين الرابع:**

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

أ. حساب النهايات على أطراف المجال $]0;+\infty[$

- $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=+\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(x^2+3)=3$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{x^2+3}{x}-2\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x}=+\infty$

ب.دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ومن أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $g'(x)=2x-\frac{2}{x}$ ومنه $g'(x)=\frac{2(x-1)}{x}$

إن إشارة $g'(x)$ من إشارة $x-1$ لأن $x>0$ و منه إشارة $g'(x)$ تعطى بـ

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]0;1]$

جدول التغيرات :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	4	↗ $+\infty$

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

2)ينتج من دراسة تغيرات الدالة g أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $g(x)\geq g(1)$ وبما أن $g(1)>0$ فإن من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$

(II)

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ومن اجل كل x من $]0;+\infty[$:

$f'(x)=\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)\times x-\ln x}{x^2}+\dfrac{2x\times 2x-2\left(x^2-1\right)}{4x^2}$ ومنه $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}+\dfrac{2x^2+2}{4x^2}=\dfrac{6+2x^2-4\ln x}{4x^2}$

أي أن $f'(x)=\dfrac{3+x^2-2\ln x}{2x^2}=\dfrac{g(x)}{2x^2}$

- استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$:

بما أنه من اجل كل x من $]0;+\infty[$: $2x^2>0$ و $g(x)>0$ فإن من اجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)>0$

و عليه الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{x^2-1}{2x}=-\infty$

- التفسير الهندسي : المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$

- جدول التغيرات :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

4) أ. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\dfrac{1}{2}x\right)$ و تفسيرها بيانيا :

لدينا $f(x)-\dfrac{1}{2}x=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{x^2-1}{2x}-\dfrac{1}{2}x$ و منه $f(x)-\dfrac{1}{2}x=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2x}-\dfrac{x}{2}$ أي أن $f(x)-\dfrac{1}{2}x=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{2x}$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2x}\right)=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\dfrac{1}{2}x\right)=0$.ومنه المستقيم (D) مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$

ب. دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) :

لنعين إشارة $f(x)-\dfrac{1}{2}x$: لدينا $f(x)-\dfrac{1}{2}x=\dfrac{2\ln x-1}{2x}$ و بما أن $x>0$ فإن إشارة $f(x)-\dfrac{1}{2}x$ من إشارة $(2\ln x-1)$

لدينا $2\ln x-1\geq 0$ تكافئ $\ln x\geq\dfrac{1}{2}$ أي أن $2\ln x-1\geq 0$ تكافئ $x\geq e^{\frac{1}{2}}$ ينتج أن $2\ln x-1<0$ تكافئ $x<e^{\frac{1}{2}}$

و بالتالي لما $x\in\left[\sqrt{e};+\infty\right[$: المنحني (C_f) يقع أعلى المستقيم (D)

لما $x\in\left]0;\sqrt{e}\right[$: المنحني (C_f) يقع أسفل المستقيم (D)

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

لما $x=\sqrt{e}$: المنحني (C_f) يقطع (D) في النقطة $\omega\left(\sqrt{e};\frac{\sqrt{e}}{2}\right)$

5) أ. إنشاء المستقيم (D) و المنحني (C_f) في نهاية حل التمرين

ب. حساب المساحة S : بتوظيف الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المستقيم (D) نجد أن

$S=\int_1^{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{2}x-f(x)\right)dx+\int_{\sqrt{e}}^{e}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)dx$ ومنه $S=\int_1^{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{2x}-\frac{\ln x}{x}\right)dx+\int_{\sqrt{e}}^{e}\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{2x}\right)dx$

إذن $S=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{x}dx-\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{x}\times\ln x\,dx+\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{1}{x}\times\ln x\,dx-\frac{1}{2}\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{1}{x}dx$

ومنه $S=\frac{1}{2}[\ln x]_1^{\sqrt{e}}-\frac{1}{2}\left[(\ln x)^2\right]_1^{\sqrt{e}}+\frac{1}{2}\left[(\ln x)^2\right]_{\sqrt{e}}^{e}-\frac{1}{2}[\ln x]_{\sqrt{e}}^{e}$ ، نجد بعد التعويض :

$S=\frac{1}{8}$ (وحدة المساحات)

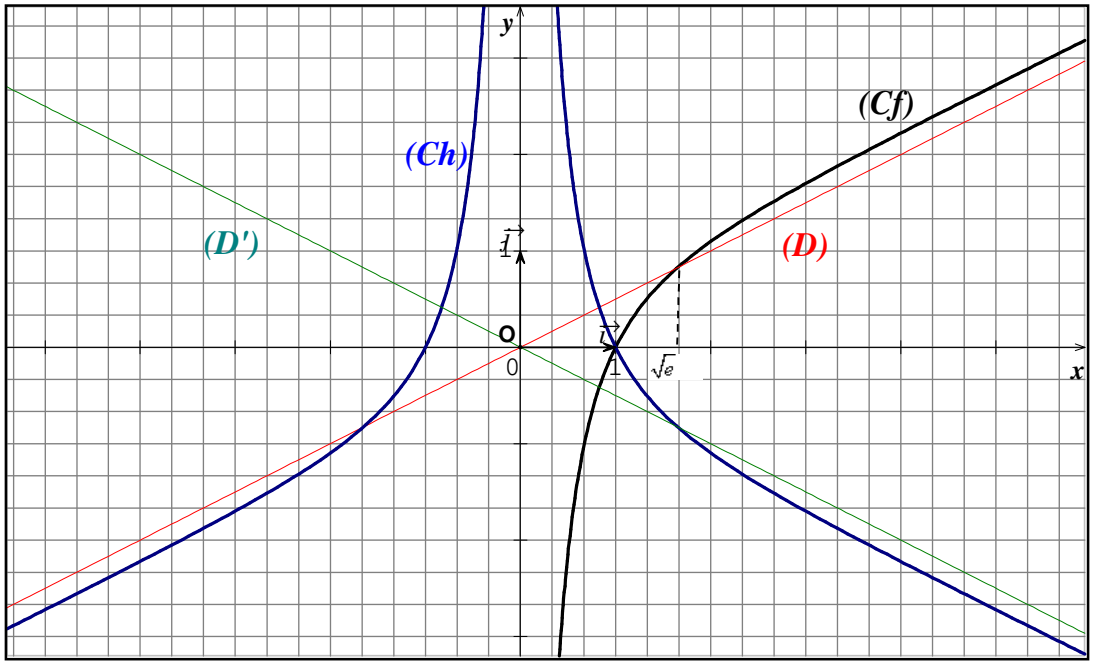
6) أ. دراسة شفعية الدالة h :

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ؛ $-x\in\mathbb{R}^*$ و $h(-x)=h(x)$ لأن $|-x|=|x|$ و $(-x)^2=x^2$ ومنه h دالة زوجية

ب. من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ؛ $|x|=x$ و $\ln x^2=2\ln x$ ومنه $h(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-x^2}{x}-\frac{2\ln x}{x}\right)$

أي أن $h(x)=\frac{1-x^2}{2x}-\frac{\ln x}{x}$ إذن $h(x)=-\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{x^2-1}{2x}\right)$ و بالتالي إذا كان $x>0$ ؛ $h(x)=-h(x)$

ينتج من هذا أنه في المجال $]0;+\infty[$ نرسم (C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل ثم نكمل الرسم إلى المجال $]-\infty;0[$ بالتناظر بالنسبة إلى حامل محور التراتيب لأن الدالة h دالة زوجية



DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري