

(I)

نعتبر المعادلة التفاضلية (E) بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{1\}$ لدينا:

$$(x-1)^2 y' - (x-2)y = 0 \quad \dots \quad (E)$$

(1) تحقق أنه يمكن كتابة المعادلة (E) على الشكل: $\ln|y| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} = c$ حيث c عدد حقيقي ثابت.

(يُشير الرمز $\ln$ إلى دالة اللوغاريتم النيبيري)

(2) استنتج الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{1\}$:

(3) أوجد الحل الخاص $g(x)$ للمعادلة التفاضلية (E) الذي يحقق: $g(0) = -1$.

(II)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بالعلاقة الجبرية الموالية:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

(C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب نهايات الدالة f على الحدود المفتوحة للمجموعة $\mathbb{R}$.

(2) هل الدالة f مستمرة عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$ ؟ علل الإجابة.

(3) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$ من اليسار، فسر هندسيا النتيجة.

(4) أ) أوجد مشتقة الدالة f على $\mathbb{R} - \{1\}$ ، (اعتمادا على الجزء الأول).

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(5) بوضع: $u = \frac{1}{x-1}$ بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ex] = \lim_{u \rightarrow 0} \left[e \frac{e^u - u - 1}{u} \right]$ ، ثم استنتج

قيمتها وفسر هذه النتيجة هندسيا.

(6) بين أن المنحنى (C_f) لا يقبل أية نقطة انعطاف.

(7) أنشئ المنحنى (C_f) ومقارباته في المعلم المذكور. (وحدة الطول هي السنتيمتر).

(III)

بالاعتماد على المنحنى البياني (C_f) ناقش تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

$$e^{\frac{x}{x-1}} - \frac{m}{x-1} - m = 0$$

تمرين: دراسة دالة تحوي الأس النيبيري.

الجزء الأول:

نعتبر المعادلة التفاضلية (E) بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{1\}$ لدينا:

$$(x-1)^2 y' - (x-2)y = 0 \quad \dots \quad (E)$$

(1) التحقق أنه يمكن كتابة المعادلة (E) على الشكل: $\ln|y| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} = c$ حيث c

عدد حقيقي ثابت:

(يُشير الرمز $\ln$ إلى دالة اللوغاريتم النيبيري)

وهذا يكون بالطريقة الموالية:

$$\ln|y| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} = c \Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + c$$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة للمتغير x نجد أن:

$$[\ln|y|]' = \left[\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + c \right]' \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + 0 = \frac{x-2}{(x-1)^2}$$

أي أن: $\frac{y'}{y} = \frac{x-2}{(x-1)^2}$ أي أن: $(x-1)^2 y' = (x-2)y$ وهذا يعني أن:

$$(x-1)^2 y' - (x-2)y = 0 \quad \text{ومنه فإن:}$$

$$\ln|y| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} = c \Leftrightarrow (x-1)^2 y' - (x-2)y = 0$$

(2) استنتاج الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{1\}$:

$$\ln|y| = \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + c \quad \text{لدينا:} \quad \ln|y| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} = c$$

فمن الواضح حينئذ أن:

$$\ln|y| = \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + c \Leftrightarrow |y| = e^{\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + c} = e^{\ln|x-1|} e^{\frac{1}{x-1} + c} = |x-1| e^{\frac{1}{x-1} + c}$$

وجدنا إذاً: $|y| = |x-1| e^{\frac{1}{x-1} + c}$ أي أن: $y = (x-1)e^{\frac{1}{x-1} + c}$ أو $y = -(x-1)e^{\frac{1}{x-1} + c}$

$$|y| = |x-1| e^{\frac{1}{x-1} + c} \dots (1) \quad \text{فنكتفي بوضع:}$$

(3) إيجاد الحل الخاص $g(x)$ للمعادلة التفاضلية (E) الذي يحقق: $g(0) = -1$:

الحل الخاص $g(x)$ يحقق المعادلة (1) وعليه لدينا:

لكن $g(0) = -1$ يحقق العلاقة $y = (x-1)e^{\frac{1}{x-1}+c}$ فقط:

$$: g(0) = (0-1)e^{\frac{1}{0-1}+c} = -e^{-1+c} = -1 = -e^0 \Rightarrow c = 1$$
 ومنه:

إذن الحل الخاص $g(x)$ هو: $g(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x-1}+1}$ أو بالأحرى هو: $g(x) = (x-1)e^{\frac{x}{x-1}}$

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بالعلاقة الجبرية الموالية: $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ أي:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{\frac{x}{x-1}} & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

(C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) حساب نهايات الدالة f على الحدود المفتوحة للمجموعة $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{\frac{x}{x-1}} = -\infty \times e = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{\frac{x}{x-1}} = +\infty \times e = +\infty$$

(2) استمرارية الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$:

نقوم بحساب النهاية: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 1} (x-1)e^{\frac{x}{x-1}} = 0. \quad \lim_{x \xrightarrow{<} 1} e^{\frac{x}{x-1}} = 0.0 = 0$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} (x-1)e^{\frac{x}{x-1}} = 0. \quad \lim_{x \xrightarrow{>} 1} e^{\frac{x}{x-1}} = 0.(+\infty)$$

نرفع عدم التعيين باستعمال مثلا التغير في المتغير الموالي: $\frac{1}{x-1} = t$ إذن لما:

$$: \text{إذن } x \xrightarrow{>} 1 \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} (x-1)e^{\frac{x}{x-1}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} e^{1+t} = e \frac{e^t}{t} = +\infty$$

إذن لقد وجدنا أن: $\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = 0 = f(0)$ وهذا ما يفسر أن الدالة f مستمرة عند النقطة

ذات الفاصلة $x = 1$ من اليسار، ووجدنا أن: $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = +\infty$ وهذا ما يفسر أن الدالة

f غير مستمرة عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$ من اليمين، وبصفة عامة الدالة f غير

مستمرة عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$ لأن: $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) \neq \lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)$.

وكذلك نفس النتيجة $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ بأن المنحنى (C_f) يقبل مقارب عمودي من اليمين معادلته: $x = 1$.

(3) دراسة قابلية f عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$ من اليسار، ثم نفسر هندسيا النتيجة:

نقوم بحساب النهاية: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)e^{\frac{x}{x-1}} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{x}{x-1}} = 0$$

الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$ من اليسار و $f'(0^-) = 0$.
التفسير الهندسي: محور الفواصل هو مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$ من اليسار.

(4) أ) إيجاد مشتقة الدالة f على $\mathbb{R} - \{1\}$ ، (اعتمادا على الجزء الأول):

(5) على المجال $\mathbb{R} - \{1\}$ الدالة f هي حل للمعادلة التفاضلية (E) ومنه:

$$(x - 1)^2 f'(x) - (x - 2)f(x) = 0$$

$$f'(x) = \frac{x - 2}{(x - 1)^2} f(x)$$

$$f'(x) = \frac{x - 2}{(x - 1)^2} (x - 1)e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{x - 2}{x - 1} e^{\frac{x}{x-1}}$$

ب) تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

إشارة المشتقة:

هي من إشارة $\frac{x - 2}{x - 1}$ ومنه جدول الإشارة هو:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x - 1$	-	0	+	+
$x - 2$	-	-	0	+
$f'(x)$	+	-	0	+

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$f(2) = e^2$	$+\infty$

(6) بوضع : $u = \frac{1}{x-1}$ نبين أن : $\lim_{u \rightarrow 0} \left[e \frac{e^u - u - 1}{u} \right]$ ثم نستنتج قيمتها ونفسر هذه النتيجة هندسيا:

لدينا من الواضح أن : $u \rightarrow 0 \Leftrightarrow |x| \rightarrow +\infty$ وأيضا $x = \frac{u+1}{u}$:

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - ex] &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[(x-1)e^{\frac{x}{x-1}} - ex \right] \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \left[\frac{1}{u} e^{1+u} - e \frac{u+1}{u} \right] = \lim_{u \rightarrow 0} \left[\frac{1}{u} e e^u - e \frac{u+1}{u} \right] \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} e \left[\frac{1}{u} e^u - \frac{u+1}{u} \right] = \lim_{u \rightarrow 0} e \left[\frac{e^u - u - 1}{u} \right] \end{aligned}$$

حساب قيمتها:

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - ex] = \lim_{u \rightarrow 0} \left[e \frac{e^u - u - 1}{u} \right] = \lim_{u \rightarrow 0} e \left[\frac{e^u - 1}{u} - 1 \right] = e(1 - 1) = 0$$

التفسير الهندسي: المستقيم الذي معادلته: $y = ex$ هو خط مقارب للمنحنى (C_f) .

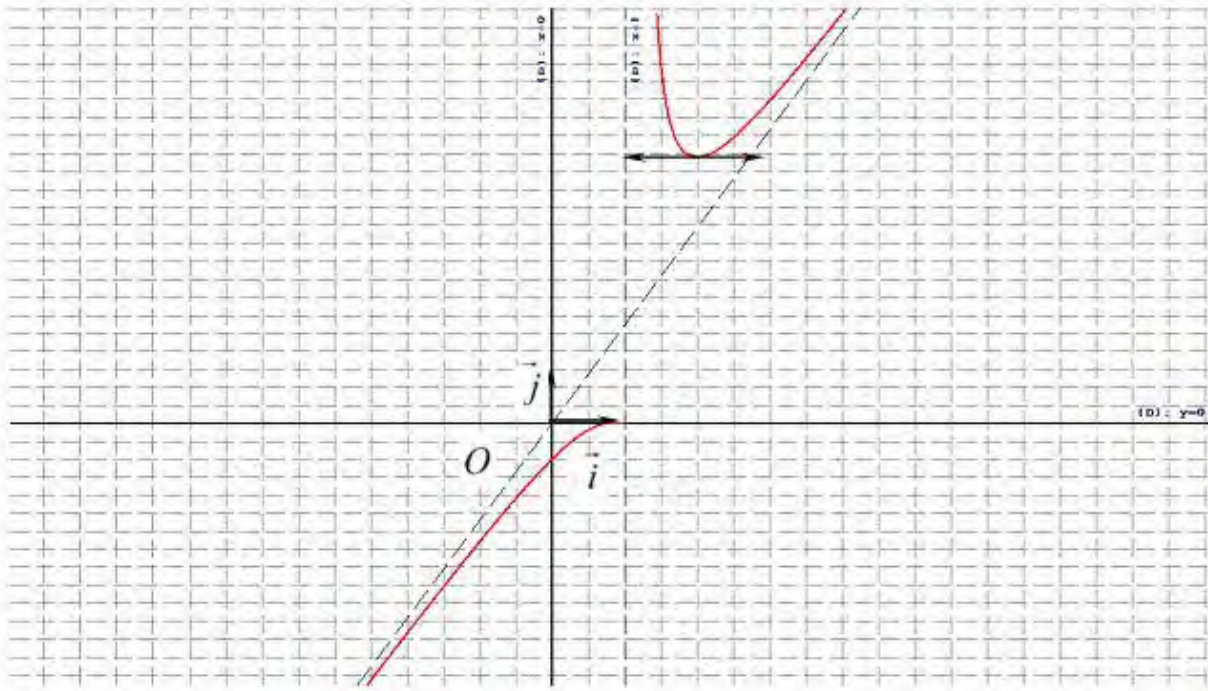
(7) نبين أن المنحنى (C_f) لا يقبل أية نقطة انعطاف:

نقوم بحساب المشتقة الثانية للدالة f على $\mathbb{R} - \{1\}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x-2}{x-1} e^{\frac{x}{x-1}} \\ f''(x) &= \frac{(x-1) - (x-2)}{(x-1)^2} e^{\frac{x}{x-1}} + \frac{x-2}{x-1} \times \frac{(x-1) - x}{(x-1)^2} e^{\frac{x}{x-1}} \\ f''(x) &= \left[\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{x-2}{(x-1)^3} \right] e^{\frac{x}{x-1}} \\ f''(x) &= \frac{1}{(x-1)^3} e^{\frac{x}{x-1}} \end{aligned}$$

المشتقة الثانية لا تغير إشارتها إلا عند النقطة الغير مستمرة التي يستحيل أن تكون نقطة انعطاف إذن المنحنى (C_f) لا يقبل أي نقطة انعطاف، وهو محدب لما: $x < 1$ ومقعر لما: $x > 1$.

(8) أنشاء المنحنى (C_f) ومقارباته في المعلم المذكور. (وحدة الطول هي السنتيمتر):



الجزء الثالث:

بالاعتماد على المنحنى البياني (C_f) نناقش تبعاً لقيم الوسيط الحقيقي m عدد الحلول :
نعيد كتابة المعادلة لربطها بالمنحنى (C_f) :

$$e^{\frac{x}{x-1}} - \frac{m}{x-1} - m = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{x-1}} - m \left[\frac{1}{x-1} + 1 \right] = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{x-1}} - \frac{mx}{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{x}{x-1}} = \frac{mx}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)e^{\frac{x}{x-1}} = mx \Leftrightarrow f(x) = mx$$

مناقشة حلول المعادلة في المجال $\mathbb{R} - \{1\}$:

حلول المعادلة هي نقط تقاطع بالمنحنى (C_f) مع المستقيمات التي تشمل المبدأ ذات معاملات التوجيه m : أي مستقيمات دورانية.

لما: $m < 0$: يوجد حل وحيد.

لما: $0 < m < e$: لا توجد حلول.

لما: $e < m \ll +\infty$: يوجد حلين.

لما: $m = +\infty$: حل وحيد.