المستوى:الثالثة علوم تجريبية | **أكتوبر 2023**

الفرض الأوّل في مادة الرياضيات | **المدة : ساعتان**

I. نعتبر الدّالة العددية g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$g(x)=x^3+6x+12$$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

2) بيّـن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيـدا α حيث : $-1,48 \prec \alpha \prec -1,47$

ثـمّ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. نعتبر الدّالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـــ :

$$f(x)=\frac{x^3-6}{x^2+2}$$

ليكن (C_f) المنحنى الممثّل لها في مستوٍ منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

1. أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بيـّن أنّــه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\frac{x\,g(x)}{(x^2+2)^2}$.

ج) ادرس اتّــجاه تغيّـر الدّالة f ثمّ شكّـل جدول تغيّـراتها .

2. أ) بيّـن أنّ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

ب) ادرس وضعيّة (C_f) بالنّسبة إلى (Δ) .

3. بيّـن أنّ : $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4. ارسم كلّا من (Δ) و (C_f)

5. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x)=m$

مـنــصـــة الـقــلــم الـجـزائـــري | DZPEN.COM

الإجابـــــة النّموذجيّـــة	العلامة

I. لدينا : $g(x) = x^3 + 6x + 12$

1) دراسة اتجاه تغير الدّالة g :

الدّالـة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $g'(x) = 3x^2 + 6$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ $g'(x) > 0$ و منه الدّالـة g متـزايـدة تـمـامـا على $\mathbb{R}$.

2) تبيـيـن أنّ المعادلـة $g(x) = 0$ حلّا وحيـدا α :

بما أنّ الدّالـة g مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و منه على $[-1,47 ; -1,48]$ و لدينا : $g(-1,48) = -0,12$ و $g(-1,47) = 0,0035$

و منه $g(-1,48) \times g(-1,47) < 0$

إذن و حسب مبرهنـة القيم المتوسطة ، المعادلـة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .

حيث $-1.47 > \alpha > -1.48$

➢ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II. لدينا: $f(x) = \frac{x^3-6}{x^2+2}$:

1) أ- حساب نهايات الدّالـة f عند أطراف مجموعة تعريفها :

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-6}{x^2+2}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}[x] = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3-6}{x^2+2}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}[x] = +\infty$

ب) حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x^2+2) - (2x)(x^3-6)}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^4 + 6x^2 - 2x^4 + 12x}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(x^3+6x+12)}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$$

ج) جدول تغيّرات $f(x)$:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-$	0	$+$		$+$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		

و منه f متزايدة تماما

على كل من $]-\infty\ ;\ \alpha\ [$ و $]\alpha\ ;\ 0\ ]$ و $[0\ ;\ +\infty[$

و f' متناقصة تماما على $]\alpha\ ;\ 0\ [$

ج) جدول تغيّرات $f(x)$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	-3	↗	$+\infty$

2) أ . نبيّن أنّ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ مقارب مائل :

$$\lim_{|x|\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{x^3-6}{x^2+2}-x\right)$$

$$= \lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{x^3-6-x^3-2x}{x^2+2}\right)$$

$$= \lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{-6-2x}{x^2+2}\right)$$

$$= \lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{-2x}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{-2}{x}\right) = 0$$

و منه المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند كلّ من $-\infty$ و $+\infty$

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنّسبة إلى (Δ) :

ندرس إشارة الفرق : $(f(x)-x)$ على $\mathbb{R}$:

$$f(x)-x = \frac{-2x-6}{x^2+2}$$

لدينا : $(x^2+2) > 0$ و منه الإشارة $f(x)-x$ هي إشارة $-2(x+3)$:

$-2x-6=0$ و منه $-2x=6$ أي $x=-3$ و منه إشارة $(f(x)-y)$:

x	-∞	-3	+∞
$(f(x)-x)$	+	0	−

x	-∞	-3	+∞
$(f(x)-x)$	+		−
الوضعية	$c(f)$ يقع أعلى (Δ)	(Δ) $c(f)$ يقطع في A(-3 , -3)	$c(f)$ يقع تحت (Δ)

3) تبيـن أنّ : $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$:

يكفي أن نبرهن أنّ : $f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=0$:

$$f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=\frac{\alpha^3-6}{\alpha^2+2}-\frac{3}{2}\alpha=\frac{2\alpha^3-12-3\alpha^3-6\alpha}{\alpha^2+2}$$
$$=\frac{-(\alpha^3+6\alpha+12)}{\alpha^2+2}=-\frac{g(\alpha)}{\alpha^2+2}=-\frac{0}{\alpha^2+2}=0$$

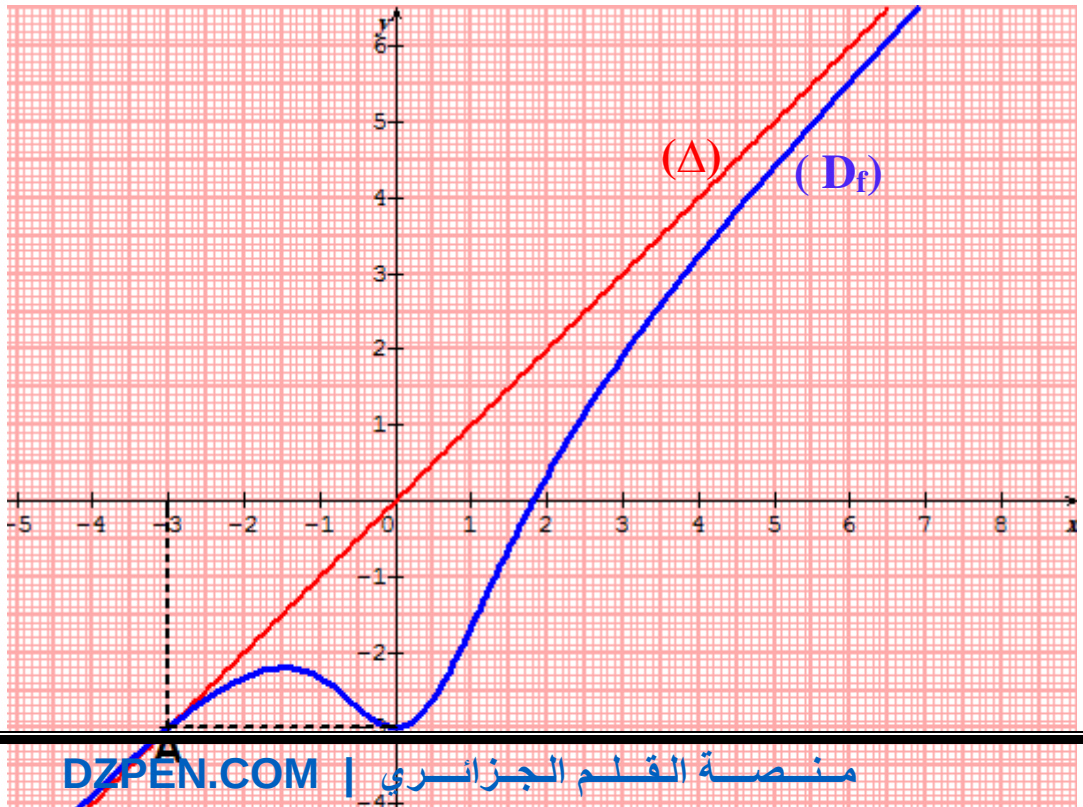
إذن : $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$

➢ استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$:

لدينا : $-1,48<\alpha<-1,47$ و لدينا $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$

و منه : $\frac{3}{2}(-1,48)<\frac{3}{2}\alpha<\frac{3}{2}(-1,47)$ أي : $-2,22<f(\alpha)<-2,21$

4) إنشاء المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) :



DZPEN.COM | منـصـــة القـلـم الـجـزائـــري

5) المناقشة البيانية :

- لمّا $m \in]-\infty; -3[$ المعادلة لها حل واحد سالب .
- لمّا $m = -3$ المعادلة تقبل حلّين أحدهما معدوم و الآخر سالب.
- لمّا $m \in]-3; f(\alpha)[$ المعادلة تقبل 3 حلول ، واحد موجب و اثنان سالبان.
- لمّا $m = f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلّين واحد موجب و الآخر سالب.
- لمّا $m \in]f(\alpha); +\infty[$ للمعادلة حل موجب .