

الفرض الأول للفصل الأول في مادة الرياضيات

اختر موضوعا واحدا من بين الموضوعين و أجب عليه

الموضوع الأول

التمرين الأول(6ن):

في كل مما يلي، يوجد اجابة واحدة صحيحة عينها مع التبرير:

1) الكتابة المبسطة للعدد $A = \ln(e + e^{-1} + 2) - 2\ln(e + 1)$ حيث A هي:(أ) $A = e + 1$ (ب) $A = 0$ (ج) $A = -1$ 2) الحل العام للمعادلة التفاضلية: $2y - y' + 1 = 0$ هو الدوال f حيث: (c ثابت حقيقي)(أ) $f(x) = ce^{2x} - \frac{1}{2}$ (ب) $f(x) = ce^x - \frac{1}{2}$ (ج) $f(x) = ce^{2x} - 2$ 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = \dots\dots$ (أ) 0 (ب) $+\infty$ (ج) 14) الدالة المعرفة على $[-2; 2]$ بـ: $f(x) = |x| - \sqrt{4 - x^2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 0:(أ) مماسا معادلته: $y = x + 1$ (ب) نقطة زاوية (ج) نصف مماس موازي لمحور الترتيب.

التمرين الثاني(14ن):

I) لتكن الدالة f_1 المعرفة على المجال $0; +\infty$ كما يلي: $f_1(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$. C_1 التمثيل البياني للدالة f_1 في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $O; \vec{i}; \vec{j}$.1) أحسب نهايات الدالة f_1 عند حدود مجموعة التعريف. فسر بيانيا النتائج.2) ادرس اتجاه تغير الدالة f_1 ثم شكل جدول تغيراتها.3) بين أن C_1 يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها.4) أنشئ C_1 .5) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f_1(x) = e^m$.II) n عدد طبيعي و $n \geq 2$ ، لتكن الدوال f_n المعرفة على المجال $0; +\infty$ كما يلي: $f_n(x) = \frac{1 + n \ln x}{x^2}$ ، C_n التمثيل البياني للدالة f_n في المعلم $O; \vec{i}; \vec{j}$.1) أدرس نهايات f_n عند حدود مجموعة التعريف. فسر بيانيا النتائج.2) بين أن من أجل كل x من $0; +\infty$: $f'_n(x) = \frac{n - 2 - 2n \ln x}{x^3}$ 3) ادرس اتجاه تغير الدالة f_n ثم شكل جدول تغيراتها.4) بين أن كل المنحنيات C_n تشمل نقطة واحدة يطلب تعيينها.5) (أ) احسب $f_n\left(\frac{1}{2}\right)$ ثم بين أنه من أجل $n \geq 2$: $f_n\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.(ب) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$ 6) أدرس الوضع النسبي لـ C_n و C_{n+1} .7) أنشئ C_2 و C_3 في المعلم $O; \vec{i}; \vec{j}$.

التمرين الأول (6ن):

في كل مما يلي، يوجد اجابة واحدة صحيحة عينها مع التبرير:

(1) مجموعة حلول المتراجحة: $\ln(2-x) + \ln(x+3) - \ln 4 \geq 0$ هي:

(أ) $s = [1; 2]$ (ب) $s =]-2; 1[$ (ج) $s = [-2; 1]$

(2) الحل العام للمعادلة التفاضلية: $2y + y' - 1 = 0$ هو الدوال f حيث: (c ثابت حقيقي)

(أ) $f(x) = ce^{-2x} + \frac{1}{2}$ (ب) $f(x) = ce^x - \frac{1}{2}$ (ج) $f(x) = ce^{2x} - 2$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = \dots\dots$

(أ) 0 (ب) $+\infty$ (ج) 1

(4) الدالة المعرفة على $[-2; 2]$ بـ: $f(x) = |x| + \sqrt{4-x^2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 0:

(أ) - مماسا معادلته: $y = x + 1$ (ب) - نقطة زاوية (ج) - نصف مماس موازي لمحور الترتيب.

التمرين الثاني (14ن):

(I) لتكن الدالة f_1 المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x + 7}$.

C_1 التمثيل البياني للدالة f_1 في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $O; \vec{i}; \vec{j}$.

(1) (أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f_1(x) = \frac{4}{1+7e^{-x}}$

(ب) أحسب نهايات الدالة f_1 عند حدود مجموعة التعريف. ماذا تستنتج.

(2) (أ) بين أن الدالة f_1 متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $0 < f_1(x) < 4$

(3) (أ) بين أن النقطة $I_1 \ln 7; 2$ مركز تناظر للمنحنى C_1 .

(ب) أكتب معادلة لـ T_1 مماس المنحنى C_1 في النقطة I_1 .

(4) أنشئ المنحنى C_1 و المماس T_1 .

(5) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f_1(x) = \ln m$

(II) n عدد طبيعي، نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7}$ ، C_n التمثيل البياني

للدالة f_n في المعلم $O; \vec{i}; \vec{j}$.

(1) بين أنه من أجل عدد حقيقي x ، $f_n(x) = f_1(nx)$. استنتج اتجاه تغير الدالة f_n .

(2) اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، المنحنيات C_n تشمل النقطة $A \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

(3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، المنحنى C_n يقطع المستقيم ذو المعادلة: $y = 2$ في نقطة وحيدة I_n يطلب تعيين احداثياتها.

(4) أكتب معادلة لـ T_n مماس المنحنى C_n في النقطة I_n .

مستافة المادة نتمنى لكم كل التوفيق والنجاح: بن صافية

الإجابة المقترحة للفرض الأول:

التمرين الأول: من الموضوعين 1 و 2

الإجابة الصحيحة	التبرير										
(1).....ج	$A = \ln(e + e^{-1} + 2) - 2 \ln(e + 1) = \ln\left(\frac{e + e^{-1} + 2}{(e + 1)^2}\right) = \ln\left(\frac{e^2 + 1 + 2e}{(e + 1)^2}\right) = \ln\left(\frac{e}{(e + 1)^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$										
(2).....أ	$2y - y' + 1 = 0 \quad \text{تكافئ} \quad y' = 2y - 1 \quad \text{حلولها هي الدوال من الشكل: } c \in \mathbb{R} \quad f(x) = ce^{2x} - \frac{1}{2}$										
(3).....أ	من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $-1 \leq \sin x \leq 1$ و من أجل $x > 0$: $\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ و بما أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$ فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$										
(4).....ب	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ x - \sqrt{4 - x^2} + 2}{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - \sqrt{4 - x^2} + 2}{x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sqrt{4 - x^2} + 2}{x} = 1 \end{cases}$ الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند (0)، لكنها قابلة للإشتقاق على يمين الـ "0" و على يسار الـ "0". تمثيلها البياني يقبل نصفي مماسين معامل توجيههما (-1) و (1) ، يشكلان نقطة زاوية.										
(1).....ج	المجموعة المرجعية للمتراجحة هي: $D =]-3; 2[$ $\ln(2 - x) + \ln(x + 3) - \ln 4 \geq 0$ منه: $\ln(2 - x) + \ln(x + 3) \geq \ln 4$ أي: $\ln((2 - x)(x + 3)) \geq \ln 4$ تكافئ: $((2 - x)(x + 3)) \geq 4$ أي: $-x^2 - x + 2 \geq 0$ و بما أن: $s = [-2; 1]$ فإن: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-2</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$-x^2 - x + 2$</td><td></td><td>$-$</td><td>$+$</td><td>$-$</td></tr></table>	x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	$-x^2 - x + 2$		$-$	$+$	$-$
x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$							
$-x^2 - x + 2$		$-$	$+$	$-$							
(2).....أ	$2y + y' - 1 = 0 \quad \text{تكافئ} \quad y' = -2y + 1 \quad \text{حلولها هي الدوال من الشكل: } c \in \mathbb{R} \quad f(x) = ce^{-2x} + \frac{1}{2}$										
(3).....أ	من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $-1 \leq \cos x \leq 1$ و من أجل $x > 0$: $\frac{-1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$ و بما أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$ فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$										
(4).....ب	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ x + \sqrt{4 - x^2} + 2}{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x + \sqrt{4 - x^2} + 2}{x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sqrt{4 - x^2} + 2}{x} = 1 \end{cases}$ الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند (0)، لكنها قابلة للإشتقاق على يمين الـ "0" و على يسار الـ "0". تمثيلها البياني يقبل نصفي مماسين معامل توجيههما (-1) و (1) ، يشكلان نقطة زاوية.										

التمرين الثاني من الموضوع الأول:

- I** لتكن الدالة f_1 المعرفة على المجال $0; +\infty$ كما يلي: $f_1(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$.
- C_1 التمثيل البياني للدالة f_1 في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $O; \vec{i}, \vec{j}$.
- (1) حساب نهايات الدالة f_1 عند حدود مجموعة التعريف و التفسير البياني:
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x^2} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln x}{x^2} = -\infty$

C_1 يقبل محوري الإحداثيات كمستقيمين مقاربين.

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة f_1 و تشكيل جدول تغيراتها:

$$f_1' x = \frac{\frac{1}{x} x^2 - 2x(1 + \ln x)}{x^2} = \frac{-1 - 2\ln x}{x^3} \text{ و } 0; +\infty \text{ قابلة للإشتقاق على}$$

لدينا: $x^3 > 0$ إشارة $f_1' x$ من إشارة البسط $-1 - 2\ln x = 0$ معناه: $x = e^{-\frac{1}{2}}$

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f_1' x$		+	-

f_1 دالة متزايدة تماما على المجال $\left[0; e^{-\frac{1}{2}}\right]$ و متناقصة تماما على المجال $\left[e^{-\frac{1}{2}}; +\infty\right]$

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f_1' x$		+	-
$f_1 x$	$-\infty$	$\nearrow \frac{e}{2}$	$\searrow 0$

(3) اثبات أن C_1 يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها:

$$f_1'' x = \frac{\frac{-2}{x^3} - 3x^2 - 1 - 2\ln x}{x^6} = \frac{1 + 6\ln x}{x^4} \text{ و } 0; +\infty \text{ قابلة للإشتقاق على}$$

لدينا: $x^4 > 0$ إشارة $f_1'' x$ من إشارة البسط $1 + 6\ln x = 0$ معناه: $x = e^{-\frac{1}{6}}$

x	0	$e^{-\frac{1}{6}}$	$+\infty$
$f_1'' x$		-	+

بما أن $f_1'' x$ تتعدم مغيرة اشارتها فإن C_1 يقبل نقطة انعطاف احداثياتها: $\left(e^{-\frac{1}{6}}; \frac{5}{6}e^{\frac{1}{3}}\right)$

(4) انشاء C_1 : في آخر الورقة.

(5) مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f_1 x = e^m$:

e^m	0	$\frac{e}{2}$	$+\infty$
$f_1 x = e^m$	حلان متمايزان	حل مضاعف	لا توجد حلول

منه:

m	$-\infty$	$\ln \frac{e}{2}$	$+\infty$
$f_1 x = e^m$	حلان متمايزان	حل مضاعف	لا توجد حلول

III n عدد طبيعي و $n \geq 2$ ، لتكن الدوال f_n المعرفة على المجال $0; +\infty$ كمايلي: $f_n x = \frac{1 + n \ln x}{x^2}$

(1) دراسة نهايات f_n عند حدود مجموعة التعريف وتفسير النتيجةين بيانيا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + n \ln x}{x^2} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + n \ln x}{x^2} = -\infty$$

C_1 يقبل محوري الإحداثيات كمستقيمين مقاربين.

$$(2) \text{ اثبات أن من أجل كل } x \text{ من } 0; +\infty : f'_n x = \frac{n-2-2n \ln x}{x^3}$$

$$f'_n x = \frac{\frac{n}{x^2} - 2x^{-1} + n \ln x}{x^2} = \frac{n-2-2n \ln x}{x^3} \text{ و } 0; +\infty \text{ قابلة للإشتقاق على}$$

(3) دراسة اتجاه تغير الدالة f_n و تشكيل جدول تغيراتها :

لدينا: $x^3 > 0$ إشارة $f'_n x$ من إشارة البسط $n-2-2n \ln x = 0$ معناه: $x = e^{\frac{n-2}{2n}}$

x	0	$e^{\frac{n-2}{2n}}$	$+\infty$
$f'_n x$		+	-

f_n دالة متزايدة تماما على المجال $\left[0; e^{\frac{n-2}{2n}}\right]$ و متناقصة تماما على المجال $\left[e^{\frac{n-2}{2n}}; +\infty\right]$

جدول التغيرات:

x	0	$e^{\frac{n-2}{2n}}$	$+\infty$
$f'_n x$		+	-
$f_n x$	$-\infty$	$ne^{\frac{2-n}{n}}$	0

(4) اثبات أن كل المنحنيات C_n تشمل نقطة واحدة :

نعتبر العددين الطبيعيين n_1 و n_2 حيث: $n_1 \neq n_2$

$$1 + n_1 \ln x = 1 + n_2 \ln x \text{ أي: } \frac{1 + n_1 \ln x}{x^2} = \frac{1 + n_2 \ln x}{x^2} \text{ معناه: } f_{n_1} x = f_{n_2} x$$

منه: $n_1 \ln x - n_2 \ln x = 0$ أي: $\ln x (n_1 - n_2) = 0$ إذن: $x = 1$ كل المنحنيات C_n تشمل نقطة واحدة هي: 1;1

$$(5) \text{ أ) حساب } f_n\left(\frac{1}{2}\right): \text{ لدينا: } f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 + n \ln \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4(1 - n \ln 2)$$

$$\text{لدينا: } n \geq 2 \text{ منه: } -n \ln 2 \leq -2 \ln 2 < 0 \text{ أي: } 1 - n \ln 2 < 0 \text{ منه: } f_n\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

(ب) اثبات أن المعادلة $f_n x = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$:

f_n دالة مستمرة و متزايدة تماما على المجال $\left[0; e^{\frac{n-2}{2n}}\right]$.

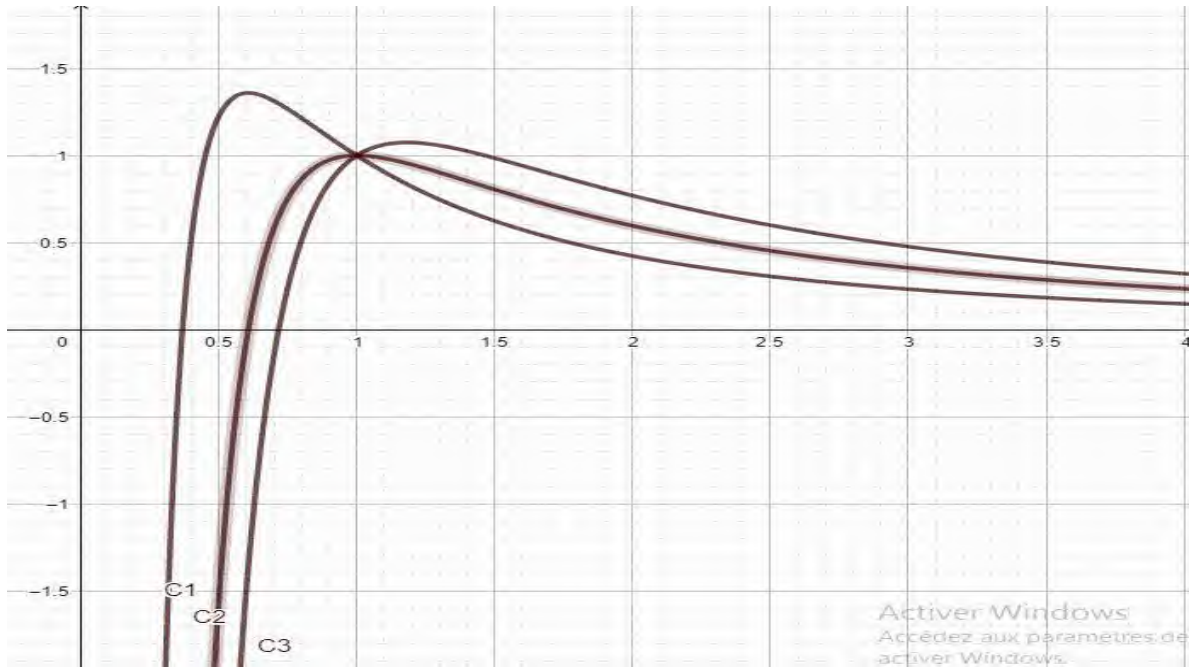
$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \text{ و } f_n(1) = 1 \text{ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة } f_n x = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا في المجال } \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

(6) دراسة الوضع النسبي لـ C_n و C_{n+1} :

$$f_{n+1} x - f_n x = \frac{1 + (n+1) \ln x}{x^2} - \frac{1 + n \ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2}$$

x	0	1	$+\infty$
$f_{n+1} x - f_n x$		-	+
الوضع النسبي لـ C_{n+1} و C_n	C_{n+1}	C_n يقطع C_{n+1}	C_{n+1} فوق C_n

(7) أنشئ C_2 و C_3 في المعلم $\vec{i}, \vec{j}, \vec{O}$.



التمرين الثاني من الموضوع الثاني:

(I) لتكن الدالة f_1 المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x + 7}$.

(1) أ) التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f_1(x) = \frac{4}{1 + 7e^{-x}}$

$$f_1(x) = \frac{4e^x \times e^{-x}}{e^x + 7e^{-x}} = \frac{4}{1 + 7e^{-x}}$$

(ب) حساب نهايات الدالة f_1 عند حدود مجموعة التعريف:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{1 + 7e^{-x}} = 4 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^x}{e^x + 7} = 0$$

C_1 يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لمحور الفواصل معادليتهما: $y = 0$ و $y = 4$.

(2) أ) اثبات أن الدالة f_1 متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ و تشكيل جدول تغيراتها:

$$f_1'(x) = \frac{4e^x \cdot e^x + 7 \cdot (-e^x)(4e^x)}{(e^x + 7)^2} = \frac{28e^x}{(e^x + 7)^2} \quad \text{و: } f_1 \text{ قابلة للإشتقاق على } \mathbb{R}$$

لدينا: $f_1'(x) > 0$ منه: f_1 دالة متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_1'(x)$	+	
$f_1(x)$	0	4

(ب) استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $0 < f_1(x) < 4$

من جدول التغيرات لدينا $0 < f_1(x) < 4$.

(3) أ) تبيان أن النقطة $I_1(2 \ln 7; 2)$ مركز تناظر للمنحنى C_1 :

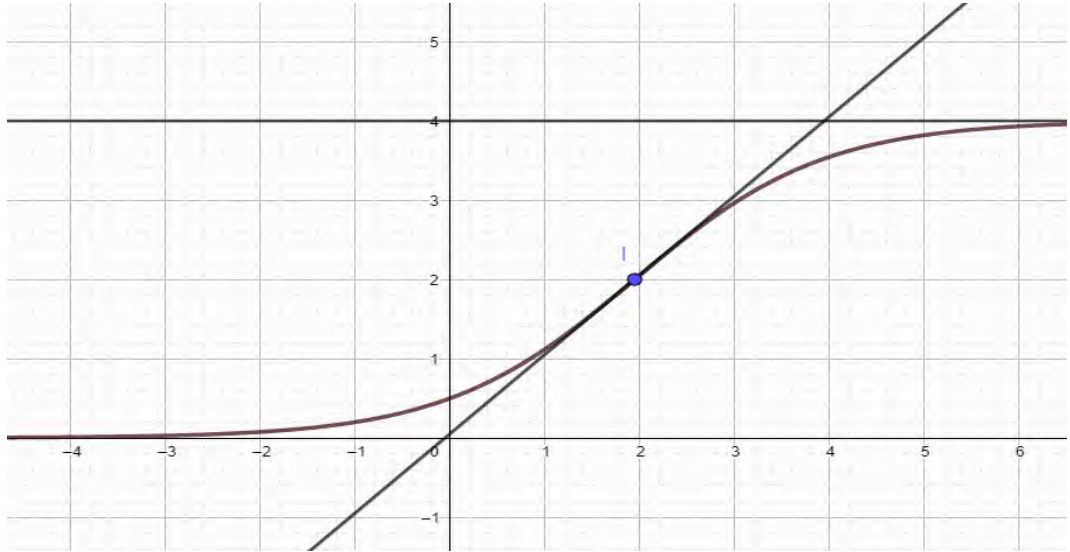
$$f_1(2 \ln 7 - x) + f_1(x) = \frac{4e^{2 \ln 7 - x}}{e^{2 \ln 7 - x} + 7} + \frac{4e^x}{e^x + 7} = \frac{4 \times 7^2 e^{-x} + 7e^{-x} \cdot 4e^x}{7^2 e^{-x} + 7} = 4$$

(ب) كتابة معادلة T_1 مماس المنحنى C_1 في النقطة I_1 :

$$T_1 : y = f_1' \ln 7 \cdot x - \ln 7 + f_1 \ln 7$$

$$y = x - \ln 7 + 2$$

(4) انشاء المنحنى C_1 و المماس T_1 .



(5) المناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f_1 x = \ln m$

$\ln m$	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$f_1 x = \ln m$		لا توجد حلول	حل وحيد	لا توجد حلول

منه:

m	0	1	e^4	$+\infty$
$f_1 x = \ln m$		لا توجد حلول	حل وحيد	لا توجد حلول

(II) n عدد طبيعي، نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_n x = \frac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7}$

(1) تبين أنه من أجل عدد حقيقي x ، $f_n x = f_1 nx$

$$\text{لدينا: } f_1 nx = \frac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7} = f_n x$$

$$f_n' x = nf_n' nx = \frac{28ne^{nx}}{e^{nx} + 7} \text{ ولدينا: } f_n \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R}$$

$$f_n' x \geq 0 \text{ منه الدالة } f_n \text{ متزايدة تماما على } \mathbb{R}.$$

(2) اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، المنحنيات C_n تشمل النقطة $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$

$$\text{لدينا: } f_n 0 = \frac{1}{2} \text{ منه المنحنيات } C_n \text{ تشمل النقطة } A\left(0; \frac{1}{2}\right).$$

(3) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، المنحنى C_n يقطع المستقيم ذو المعادلة: $y = 2$ في نقطة وحيدة I_n :

$$\text{لدينا: } f_n x = 2 \text{ معناه: } \frac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7} = 2 \text{ أي: } 4e^{nx} = 2e^{nx} + 7 \text{ منه: } x = \frac{\ln 7}{n}$$

$$\text{اذن: } I_n \left(\frac{\ln 7}{n}; 2 \right)$$

(4) كتابة معادلة T_n مماس المنحنى C_n في النقطة I_n :

$$T_n : y = f_n' \left(\frac{\ln 7}{n} \right) \left(x - \frac{\ln 7}{n} \right) + f_n \left(\frac{\ln 7}{n} \right)$$

$$y = nx - \ln 7 + 2$$