



التمرين الأول: (10 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_1 = -2$ ، و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_{n+1} = \frac{3(n+1)u_n - (8n+12)}{n}$$

(1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n < 0$.

ب) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

(2) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي : $v_n = \frac{4-u_n}{n}$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول ، ثم عبر عن v_n بدلالة n .

ب) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $u_n = 4 - 2n \times 3^n$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

ج) أحسب بدلالة n الجداء : $P_n = (4-u_1)(4-u_2) \dots (4-u_n)$.

(3) لتكن المتتالية العددية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي : $w_n = \ln\left(\frac{n}{4-u_n}\right)$.

- عبر عن w_n بدلالة n ثم أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$.

التمرين الثاني : (10 نقاط)

(u_n) متتالية معرفة على N بـ : $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل n من N : $u_{n+1} = \frac{6u_n - 2}{u_n + 3}$

(1) عين القيم الممكنة للعدد الحقيقي α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة .

(2) نضع $\alpha = \frac{3}{2}$: أ - بين أنه من أجل كل n من N : $u_{n+1} = 6 - \frac{20}{u_n + 3}$

ب - برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من N : $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$

ج - بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما . ماذا تستنتج ؟

(3) أ - بين أنه من أجل كل n من N : $0 \leq 2 - u_{n+1} \leq \frac{8}{9}(2 - u_n)$

ب - استنتج أنه من أجل كل n من N : $0 \leq 2 - u_n \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{8}{9}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.