

فرض

الفصل الثالث

تمرين 1 (06 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. لتكن النقط A ، B و C من هذا المستوي التي لاحقاتها: $z_C = -3 - 3i$ و $z_B = 1 + 3i$ ، $z_A = 2 - 2i$.

(1) اكتب على الشكل الجبري العدد $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ، ثم بين أن: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، واستنتج طبيعة المثلث ABC .

(2) بين أن: $\left(\frac{z_A + z_B + z_C + 2}{2\sqrt{2}}\right)^{2025} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

(3) أ) عيّن z_D لاحقة النقطة D بحيث: $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = 2$ ، ثم استنتج أن النقط A ، B و D في استقامية.

ب) لتكن النقطة E نظيرة النقطة C بالنسبة للنقطة A . بين أن لاحقة النقطة E هي $z_E = 7 - i$.

(4) أ) ماذا يمكن قوله عن القطعتين $[BD]$ و $[CE]$ ؟ استنتج طبيعة الرباعي $BCDE$ ثم مثله.

ب) عيّن وأنشئ المجموعة Γ للنقط M من المستوي التي تحقق: $\|\overline{MC} + \overline{ME}\| = 2\|\overline{MA} - \overline{MB}\|$.

تمرين 2 (05 نقاط)

يحتوي كيس على 4 كريات سوداء تحمل الأرقام التالية: 4، 0، 2، 2 و 4 كريات بيضاء تحمل الأرقام التالية: 1، 4، 4، 5. نسحب عشوائيا وفي آن واحد من هذا الكيس كرتين. كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس.

(1) احسب p_1 احتمال أن يكون رقمي الكرتين المسحوبتين زوجيين.

(2) بين أن احتمال أن تكون القيمة المطلقة للفرق بين رقمي الكرتين المسحوبتين معدوما هو $p_2 = \frac{1}{7}$.

(3) نُعرّف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب القيمة المطلقة للفرق بين الرقمين المحصل عليهما.

برّر أن قيم X هي: $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ ، ثم عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

(4) نضع الآن الكريات السوداء في الكيس U_1 والكريات البيضاء في الكيس U_2 . في التجربة الأولى نسحب عشوائيا كرية واحدة من الكيس U_1 نضعها في الكيس U_2 ثم نسحب من هذا الأخير عشوائيا وفي آن واحد كرتين. وفي التجربة الثانية نسحب عشوائيا كرية واحدة من الكيس U_2 نضعها في الكيس U_1 ثم نسحب من هذا الأخير عشوائيا وفي آن واحد كرتين.

نعتبر الحادثة A : الكرتان المسحوبتان تحملان نفس الرقم.

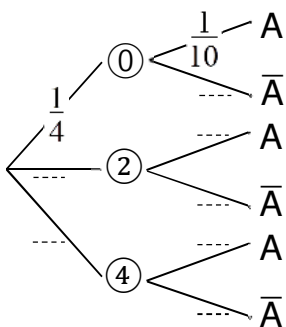
أ) انقل ثم أكمل شجري الاحتمالات المقابلة التي

تنمذج هذه العملية من أجل كل تجربة.

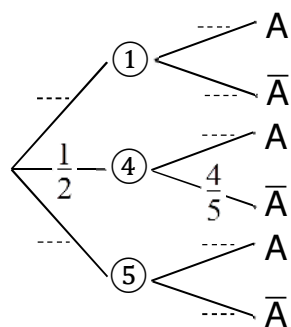
ب) احسب احتمال سحب كرتين تحملان

رقمين مختلفين من أجل كل تجربة.

(تُعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)



تجربة 1



تجربة 2

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; e^{\frac{5}{2}}]$ بـ: $f(x) = 2\ln x - (\ln x)^2$. وليكن (\mathcal{C}) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث وحدة الطول $1cm$.

1) بين أن المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقارب للمنحني (\mathcal{C}) .

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; e^{\frac{5}{2}}]$: $f'(x) = \frac{2-2\ln x}{x}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات f .

ب) ما هو عدد حلول المعادلة $f(x) = -2$ ؟ لا يطلب حساب الحلول.

ج) بين أن المنحني (\mathcal{C}) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

3) أ) اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (\mathcal{C}) عند النقطة التي فاصلتها 1.

ب) حل على المجال $]0; e^{\frac{5}{2}}]$ المعادلة $f(x) = 0$ ، ثم فسّر النتيجة بيانياً.

ج) أنشئ المماس (T) والمنحني (\mathcal{C}) .

4) نعتبر التكاملين التاليين: $I = \int_e^{e^2} \ln x dx$ و $J = \int_e^{e^2} (\ln x)^2 dx$

أ) باستعمال الكاملة بالتجزئة بين أن: $I = e^2$ و $J = 2e^2 - e$.

ب) احسب مساحة الحيز A المحدد بـ (\mathcal{C}) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = e$ و $x = e^2$.

5) h الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; e^{\frac{5}{2}}]$ بـ: $h(x) = |f(x)|$. (\mathcal{C}_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) اكتب h دون رمز القيمة المطلقة، ثم ارسم بيانها مع الشرح.

ب) m وسيط حقيقي موجب. عيّن قيم m حتى تقبل المعادلة $(f(x))^2 = m$ أربعة حلول متمايزة.

6) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = e$ و $u_{n+1} = [f(u_n)]^2 + 1$.

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq e$.

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} \leq u_n$. استنتج أن (u_n) متقاربة نحو 1.



تمرين 2:

$(0, 2, 2, 4, 4, 4) \quad P_1 = \frac{C_6^2}{C_8^2} = \frac{15}{28} \quad (1)$

$(2, 2=4-4=0) \quad P_2 = \frac{C_2^2 + C_3^2}{C_8^2} = \frac{1}{7} \quad (2)$

$(2, 2=4-4=0) \quad P(X=0) = P_2 = \frac{1}{7} \quad (3)$

$P(X=1) = \frac{C_1 \times C_3^2 + C_2 \times C_1 + C_4 \times C_1}{C_8^2} = \frac{3}{14}$
 $(5-4=2-1=1-0=1)$

$P(X=2) = \frac{C_1 \times C_2^2 + C_2 \times C_1}{C_8^2} = \frac{2}{7}$
 $(4-2=2-0=2)$

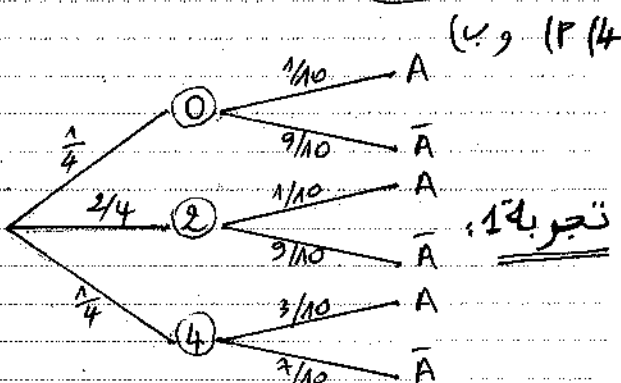
$P(X=3) = \frac{C_1 \times C_1 + C_3 \times C_1}{C_8^2} = \frac{5}{28}$
 $(5-2=4-1=3)$

$P(X=4) = \frac{C_1 \times C_1 + C_3 \times C_1}{C_8^2} = \frac{1}{7}$
 $(5-1=4-0=4)$

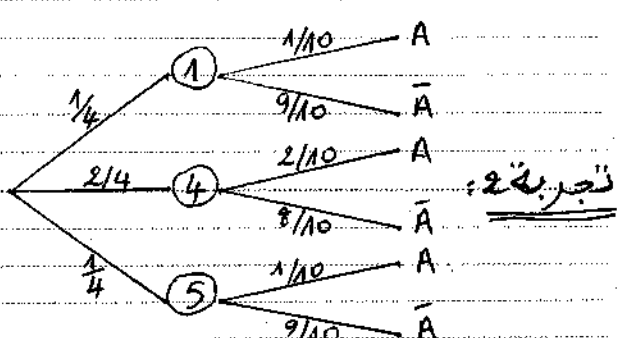
$(5-0=5) \quad P(X=5) = \frac{C_1 \times C_1}{C_8^2} = \frac{1}{28}$

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{28}$

$E(X) = \sum_{k=0}^5 k P(X=k) = \frac{29}{14}$



$P(\bar{A}) = \frac{1}{4} \times \frac{9}{10} + \frac{2}{4} \times \frac{9}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{7}{10} = \frac{17}{20}$



$P(\bar{A}) = \frac{1}{4} \times \frac{9}{10} + \frac{2}{4} \times \frac{8}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{9}{10} = \frac{17}{20}$

تصحيح فرض الفصل الثالث 2025

تمرين 1: "عبد المطلب"

$\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-5-i}{-1+5i} = \frac{i(5i-1)}{-1+5i} = i \quad (1)$

$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ من حيث $\sin \theta = 1$ و $\cos \theta = 0$ $|\lambda| = 1$

$\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A} = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

مثلث قائم ABC و متساوي الساقين $\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z_c - z_A}{z_B - z_A} \right| = \frac{AC}{AB} = 1 \\ \arg\left(\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$

$\frac{z_A + z_B + z_c + z}{2\sqrt{2}} = \frac{2 - 2i}{2\sqrt{2}} = 1 \cdot e^{i(-\frac{\pi}{4})} \quad (2)$

$\left[e^{i(-\frac{\pi}{4})} \right]^{2025} = e^{i(-\frac{2025\pi}{4})} = e^{i(-\frac{2024\pi}{4} - \frac{\pi}{4})}$

$\left(\frac{z_A + z_B + z_c + z}{2\sqrt{2}} \right)^{2025} = e^{i(-\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_D = 2(z_A - z_B) + z_B = 3 - 2i$ $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = 2$ (3)

$(\vec{BA}, \vec{BD}) = 2k\pi$ أي $\arg(2) = 2k\pi$

ومنه: A, B, D في الاستقامة ($\vec{BD} = 2\vec{BA}$)

$z_E = 2z_A - z_c = 7 - i$ ومنه: $z_A = \frac{z_c + z_E}{2}$ (4)

$[BD] \cap [CE]: \frac{z_c + z_E}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} = z_A$ (4) (متقاطعتان)

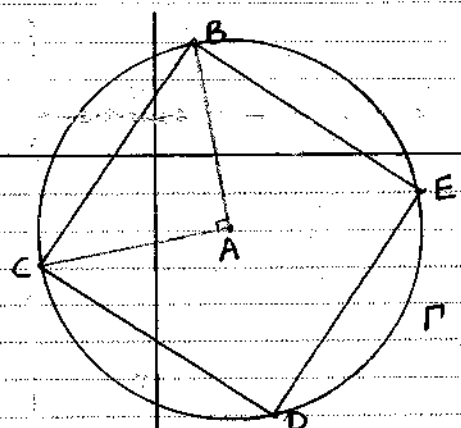
سابقا: $(AB) \perp (AC)$ أي $[BD] \perp [CE]$ (متساوية الساقين متقاطعتان) ومنه: $AB = AC$ أي $[BD] = [CE]$ (متساويتان) ومنه: $BCDE$ مربع.

(ب) $\|\vec{MC} + \vec{ME}\| = 2 \|\vec{MA} - \vec{MB}\|$

$\|\vec{MA} + \vec{AC} + \vec{MA} + \vec{AE}\| = 2 \|\vec{BM} + \vec{MA}\|$

$\|\vec{MA} + \vec{AC} + \vec{AE}\| = 2 \|\vec{BA}\|$

Γ هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها AB أي تتلصق بـ B .



تمرين 3:

(P. 4)

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases} \begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$I = [x \ln x]_e^e - \int_e^e dx = [x \ln x - x]_e^e = e^2 - e$$

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{2 \ln x}{x} \\ v(x) = x \end{cases} \begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$J = [x (\ln x)^2]_e^e - 2 \int_e^e \ln x dx$$

$$J = 4e^2 - e - 2I = 2e^2 - e$$

$$A = \int_e^e f(x) dx = 2I - J = e \text{ u.a.}$$

(P. 5) إشارة f(x): $\frac{1}{x} - \frac{e^2}{x^2}$

$h(x) = f(x) : f(x) \geq 0, x \in [1, e^2]$
(\mathbb{R}) يطابق (C)

$h(x) = -f(x) : f(x) < 0, x \in]0, 1[\cup]e^2, e^{\frac{e^2}}]$

(\mathbb{R}) يناظر (C) بالنسبة لـ (0x)

$$|f(x)| = \sqrt{m} \text{ يعني } [f(x)]^2 = m$$

حلول هذه المعادلة هي فواجر نقط تقاطع (\mathbb{R}) مع المستقيمت الأفقية $y = \sqrt{m}$

4 حلول متمايزة: $0 < \sqrt{m} < 1$ و $0 < m < 1$

(P. 6) $n=0 : u_0 = e, 1 \leq u_0 \leq e$ (مؤقفة)

نفرض أن $1 \leq u_n \leq e$ من أجل كفي ونبرهن

صحة: $1 \leq u_{n+1} \leq e$. لدينا: $1 \leq u_n \leq e$

$f(1) \leq f(u_n) \leq f(e)$ لأن f متزايدة على $[1, e]$

$$0 \leq [f(u_n)]^2 \leq 1, \quad 0 \leq f(u_n) \leq 1$$

$1 \leq u_{n+1} \leq e$ أي $1 \leq [f(u_n)]^2 + 1 \leq 2 \leq e$

ومنا: $(1 \leq u_n \leq e)$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

(ب) نبرهن بالتراجع: $u_{n+1} \leq u_n$

$n=0 : u_1 \leq u_0, u_0 = e, u_1 = 2$ (مؤقفة)

نفرض صحة $u_{n+1} \leq u_n$ من أجل n كفي ونبرهن

صحة $u_{n+2} \leq u_{n+1}$. لدينا: $u_{n+1} \leq u_n$

$$[f(u_{n+1})]^2 \leq [f(u_n)]^2, \quad f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$

$$[f(u_{n+1})]^2 + 1 \leq [f(u_n)]^2 + 1$$

$\forall n \in \mathbb{N} (u_{n+1} \leq u_n)$ ومنا: $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

(u_n) متناقصة وضرورة من أجل أن نصل إلى متقاربة

$$[f(l)]^2 = l - 1, \quad l = [f(l)]^2 + 1, \quad 1 \leq l \leq e$$

لدينا: $f(l) = 0$ لـ $l = 1$ ومنا: $(l=1)$ عند المطبق

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2 \ln x - (\ln x)^2) = -\infty - \infty = -\infty$$

مستقيم مقارب عمودي: $x=0$

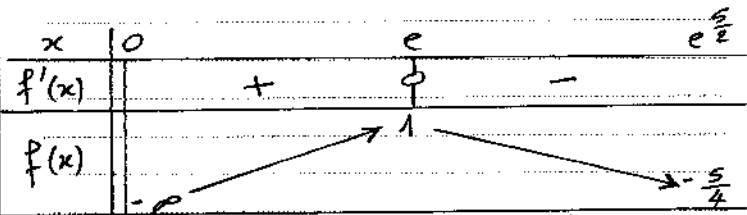
$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{2 \ln x}{x} = \frac{2 - 2 \ln x}{x} \quad (P. 2)$$

$$-\ln x > -1 \text{ لـ } 2 - 2 \ln x > 0$$

$$0 < x < e \text{ : ومنا } \ln x < 1$$

$$0 < x \leq e \text{ لـ } f'(x) \geq 0$$

$$e < x \leq e^{\frac{e^2}} \text{ لـ } f'(x) < 0$$



(ب) لـ $f(x) = -2, x \in [e, e^{\frac{e^2}}]$ لـ $f(x) < 0$ لا تقبل طولاً

ولما $f(x) = -2, x \in]0, e[$ تقبل طولاً وحيداً

لأن f مستمرة ومتزايدة تماماً و $f(e) = 1 > 0$

(مبرهنه القيم المتوسطة) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

$$f''(x) = \frac{-2 - (2 - 2 \ln x)}{x^2} = \frac{-4 + 2 \ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = 0 \text{ لـ } \ln x = 2 \text{ أي } x = e^2$$

f'' تنعدم وتغير إشارتها $\rightarrow -\frac{e^2}{e^4} +$

النقطة هي $w(e^2, f(e^2))$ أي $w(e^2, 0)$

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2x - 2 \quad (P. 3)$$

$$\ln x (2 - \ln x) = 0 : f(x) = 0 \text{ (ب)}$$

$$x = e^2 : \ln x = 2 \text{ و } x = 1 : \ln x = 0$$

تمثل فاصلي نقطتي تقاطع (C) مع (0x).

(ج) رسم (C), المماس (T) والخطي (\mathbb{R}).

