



مارس 2022

المستوى: الثالثة علوم تجريبية

المدة : ساعتين.

اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين 1

لتكن الدالة f المعرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x}{x+1}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$
(الشكل في الوثيقة المرفقة)

(I) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 1} \end{cases}$$

(1) مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حسابها موضحا خطوط الانشاء).

(2) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

(3) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n: u_n < 2$

(4) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة ، و عين نهايتها.

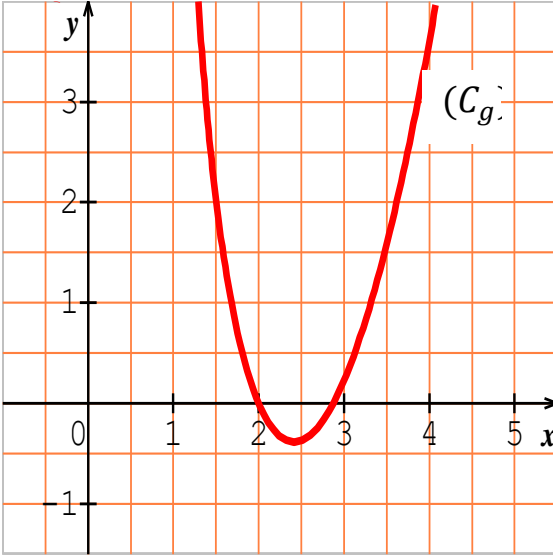
(II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$

(ا) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

(ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

(3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{u_0}{u_0-2} + \frac{u_1}{u_1-2} + \dots + \frac{u_n}{u_n-2}$

التمرين 2



(I) لتكن الدالة g المعرفة على $]1; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x^2 - 2x - 4 \ln(x-1)$$

و ليكن (C_g) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل المقابل

(1) بقراءة بيانية : عين حلول المعادلة $g(x) = 0$

(2) احسب $g(2)$ ، ثم بين ان المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α حيث $2.87 < \alpha < 2.88$

(3) استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x .

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $]1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - 3 + \frac{4 \ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ) احسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف ، فسر النتائج هندسيا.

(2) ا) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x - 3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(3) ا) بين انه من اجل كل x من $]1; +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

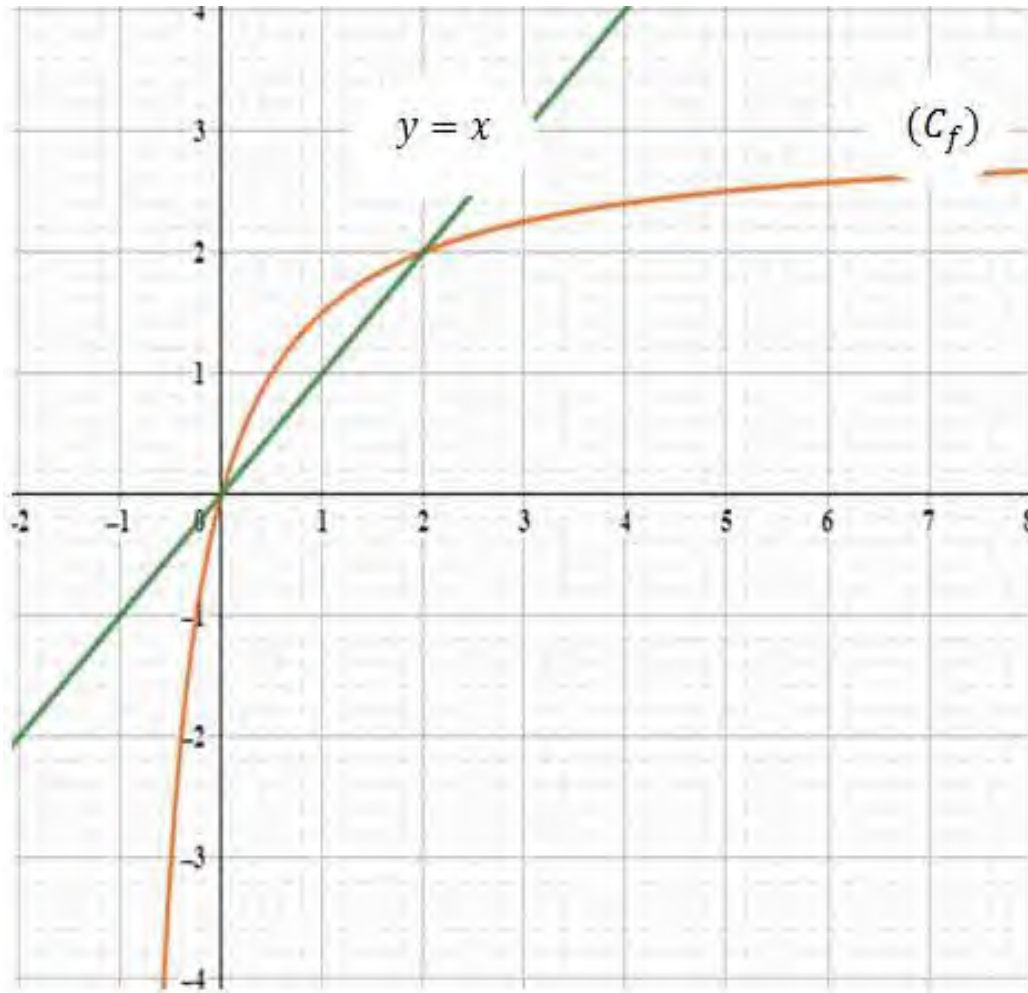
(4) ارسم (T) و (C_f) . (نأخذ $f(\alpha)$)

(5) لتكن الدالة h المعرفة على $]1; +\infty[$ كما يلي :

$$h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 2[\ln(x-1)]^2 + 5\ln(x-1)$$

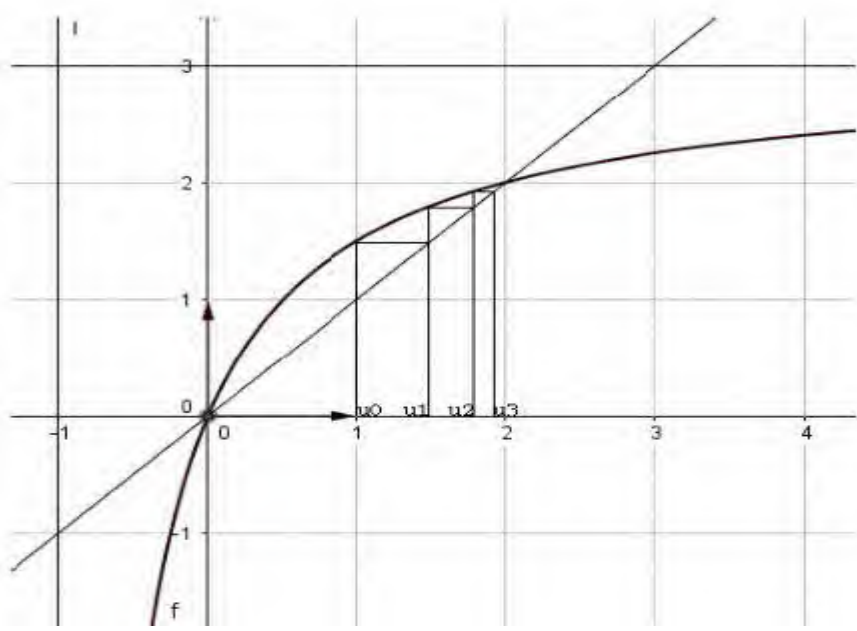
- بين ان الدالة h دالة اصلية للدالة f .

بالتوفيق.



- الوثيقة المرفقة -

التصحيح النموذجي

العلامة	الحل	رقم التمرين
	(1) تمثيل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3،  (2) التخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها. نحمن أن المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة نحو العدد 2. (3) البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n < 2$. نسمي $P(n)$ الخاصية $u_n < 2$ (1) من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=1$ و $1 < 2$ و منه : $u_0 < 2$ أي (p_n) صحيحة من أجل $n=0$. (2) نفرض صحة (p_n) و نبهن على صحة (p_{n+1}) أي نفرض أن $u_n < 2$ و نبهن أن $u_{n+1} < 2$ لدينا : $u_n < 2$ و منه $u_n + 1 < 3$ أي $\frac{1}{u_n + 1} > \frac{1}{3}$ أي $\frac{-3}{u_n + 1} < -1$ و منه : $3 - \frac{3}{u_n + 1} < 3 - 1$ وبالتالي : $u_{n+1} < 2$، إذن : (p_{n+1}) صحيحة . ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $u_n < 2$	التمرين 1

(4) اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتاج أنها متقاربة ، و نهايتها.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{u_n + 1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 2u_n}{u_n + 1} = \frac{-u_n(u_n - 2)}{u_n + 1}$$

لدينا من البرهان بالتراجع : $u_n < 2$ أي : $u_n - 2 < 0$ و $u_n > 0$ أي : $-u_n < 0$

و منه $u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة .
- بما أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2 و متزايدة فإنها متقاربة.

$$\left| \begin{array}{l} \text{لدينا : } \frac{3\ell}{\ell+1} = \ell \text{ و منه : } \ell^2 + \ell = 3\ell \text{ أي : } \ell^2 - 2\ell = 0 \end{array} \right|$$

$$\ell = 0 \text{ (مرفوض) أو } \ell = 2$$

و منه $\ell = 2$

(ا) نبرهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

$$\text{لدينا : } v_n = 1 - \frac{2}{u_n} \text{ و منه : } v_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2}{\frac{3u_n}{u_n + 1}} = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{u_n + 1}{u_n} = 1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3u_n}$$

$$\text{و منه : } v_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3u_n} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2}{u_n} \right) = \frac{1}{3} v_n$$

$$q = \frac{1}{3} ; \quad v_0 = 1$$

(ب) عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

$$v_n = - \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

$$u_n = \frac{2}{1 - v_n} = \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{3} \right)^n}$$

و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

(3) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{u_0}{u_0 - 2} + \frac{u_1}{u_1 - 2} + \dots + \frac{u_n}{u_n - 2}$

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}(3)^n$$

(I)

1) بقراءة بيانية للمنحني نجد المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين متميزين

2) لدينا: $g(2) = 0$

$g(2) = 0$:

* بما أن g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[2.87; 2.88]$ و $<$

$g(2.87) \cdot g(2.88)$

وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[2.87; 2.88]$

3) إشارة $g(x)$ حسب قيم x ملخصة في الجدول التالي:

x	1	2	α	$+\infty$
$g(x)$		+ 0	- 0	+

(II)

1) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ ومنه المستقيم الذي معادلته $x = 1$ مقارب لـ: (C_f)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ *

2- أ) بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 3)] = 0$ فإن المستقيم الذي معادلته $y = x - 3$ هو

مستقيم مقارب

مائل للمنحني (C_f) بجوار $(+\infty)$

ب) لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل ندرس إشارة الفرق

$f(x) - y$ و الملخصة في الجدول التالي

x	1	$1 + e^{-\frac{5}{4}}$	$+\infty$
$f(x) - y$		- 0	+
الوضعية		(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)

أ-3 (مهما كان $x \in]1; +\infty[$ لدينا: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$

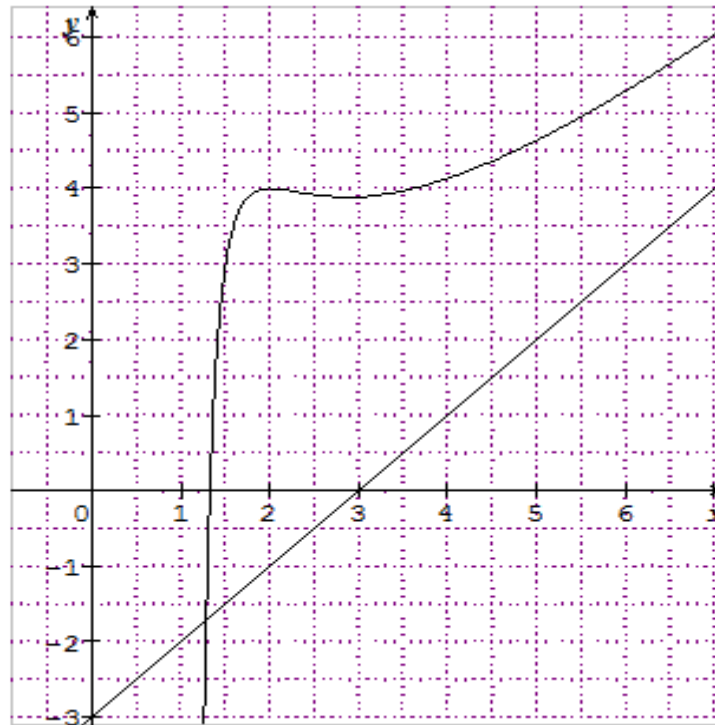
ب (إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

أي أن: f متزيدة تماما على كل من المجالين $[1; 2]$ و $[\alpha; +\infty[$ ومتناقصة تماما على $[2; \alpha]$
جدول التغيرات

x	1	2	α	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

A graph of the function $f(x)$ is shown. The x-axis has points $-\infty$, 1 , 2 , α , and $+\infty$. The function starts at $-\infty$ at $x=-\infty$, increases to a local maximum at $x=2$ with value 4 , decreases to a local minimum at $x=\alpha$ with value $f(\alpha)$, and then increases towards $+\infty$ as x approaches $+\infty$.

(4) رسم (T) و (C_f) .



(5) نبين ان الدالة h دالة اصلية للدالة f .

$$h'(x) = f(x)$$