



مارس 2023

المستوى: الثالثة علوم تجريبية

المدة : ساعتين.

اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين 1 (8 ن)

f دالة معرفة على $[4; 7]$ بـ: $f(x) = \sqrt{x+2} + 4$

(1) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4; 7]$

(2) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = f(u_n)$

(أ) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 \leq u_n \leq 7$

(ب) بين انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 9u_n - 14}{\sqrt{u_n + 2} + u_n - 4}$

(ج) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم بين أنها متقاربة.

(3) (أ) بين انه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 7 - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(7 - u_n)$

(ب) استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n)

التمرين 2 (12 ن)

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2 + (x - 2)e^{-x+2}$

(1) أدرس تغيرات الدالة g و شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1,14 < \alpha < 1,15$

(3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 2x - 1 - (x - 1)e^{-x+2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(طول الوحدة 2 cm).

(1) (أ) احسب كلا من: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x) = g(x)$

(ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) (أ) اثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

جـ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) ، يطلب كتابة معادلته.

(3) أحسب كلا من : $f(0)$ و $f(2)$ ثم أنشئ (T) , (Δ) و (C_f) . (يعطى : $f(\alpha) \approx 0,95$)

III نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = (x - 1) e^{-x+2}$

(1) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين الدالة الأصلية H للدالة h على $\mathbb{R}$ و التي تتعدم عند 0.

(2) أحسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) و المستقيمين الذين معادلاتها: $x = \alpha$, $x = 1$

(3) بين أن: $A(\alpha) = 8 + 4e + \frac{16}{\alpha - 2} \text{ cm}^2$

بالتوفيق.

التصحيح النموذجي

العلامة	الحل	رقم التمرين
	(1) نبين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4; 7]$ f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و f' دالتها المشتقة حيث : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \text{ لدينا } [4; 7]$ من أجل كل x من $[4; 7]$ لدينا : بما أن $f'(x) > 0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4; 7]$ (2) أ) البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $n: 4 \leq u_n \leq 7$ ب) نبين انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 9u_n - 14}{\sqrt{u_n + 2} + u_n - 4}$ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} + 4 - u_n$ إذن $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 9u_n - 14}{\sqrt{u_n + 2} + u_n - 4}$ ج) استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم نبين أنها متقاربة. مما سبق لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 9u_n - 14}{\sqrt{u_n + 2} + u_n - 4}$ و منه $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 2)(u_n - 7)}{\sqrt{u_n + 2} + u_n - 4}$ بما أن $u_{n+1} - u_n > 0$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ - بما أن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و محدودة من الأعلى بالعدد 7 فإن المتتالية (u_n) متقاربة. (3) أ) نبين انه من أجل كل عدد طبيعي $n: 0 \leq 7 - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(7 - u_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n : $7 - u_{n+1} = \frac{7 - u_n}{3 + \sqrt{u_n + 2}}$ إذن $0 \leq 7 - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(7 - u_n)$	التمرين 1

ب) استنتاج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$
لدينا مما سبق $0 \leq 7 - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(7 - u_n)$

ومنه

$$0 \leq 7 - u_1 \leq \frac{1}{4}(7 - u_0)$$

$$0 \leq 7 - u_2 \leq \frac{1}{4}(7 - u_1)$$

⋮

$$0 \leq 7 - u_n \leq \frac{1}{4}(7 - u_{n-1})$$

بالضرب طرفا لطرف نـجـد $0 \leq 7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

- استنتاج نهاية المتتالية (u_n)

مما سبق لدينا $0 \leq 7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

حسب مبرهنة الحصر نجد

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 7$$

(I) الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2 + (x - 2)e^{-x+2}$
 1) دراسة تغيرات الدالة g و جدول تغيراتها.

• النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$$

• الدالة المشتقة

g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و g' دالتها المشتقة حيث :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $g'(x) = (3-x)e^{-x+2}$

• إشارة $g'(x)$:

•

التمرين
2

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$g'(x)$		0	
	+		-

و منه g دالة متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 3]$
 و متناقصة تماما على المجال $[3; +\infty[$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$g'(x)$		0	
	+		-
$g(x)$	2	$2+e^{-1}$	$-\infty$

(2) نبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1,14 < \alpha < 1,15$
 باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة

(3) استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		0	
	-		+

(II) أ) حساب كلا من : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

ب) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f'(x) = g(x)$
 ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم جدول تغيراتها
 • إشارة $f'(x)$: من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

و منه f دالة متناقصة تماما على المجال $]-\infty ; \alpha]$
 و متزايدة تماما على المجال $[\alpha ; +\infty[$

• جدول التغيرات

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(2) أ) نبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x - 1)] = 0$$

و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

ب) أ الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

إشارة $f(x) - y$:

$$-(x+1)e^{-x+1} = 0 \text{ يكافئ } -(x+1) = 0 \text{ لأن } e^{-x+1} > 0 \text{ و منه } x = 1$$

و منه إشارة $f(x) - y$ من إشارة $-x - 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-
الوضعية النسبية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1; 1)$	(C_f) تحت (Δ)

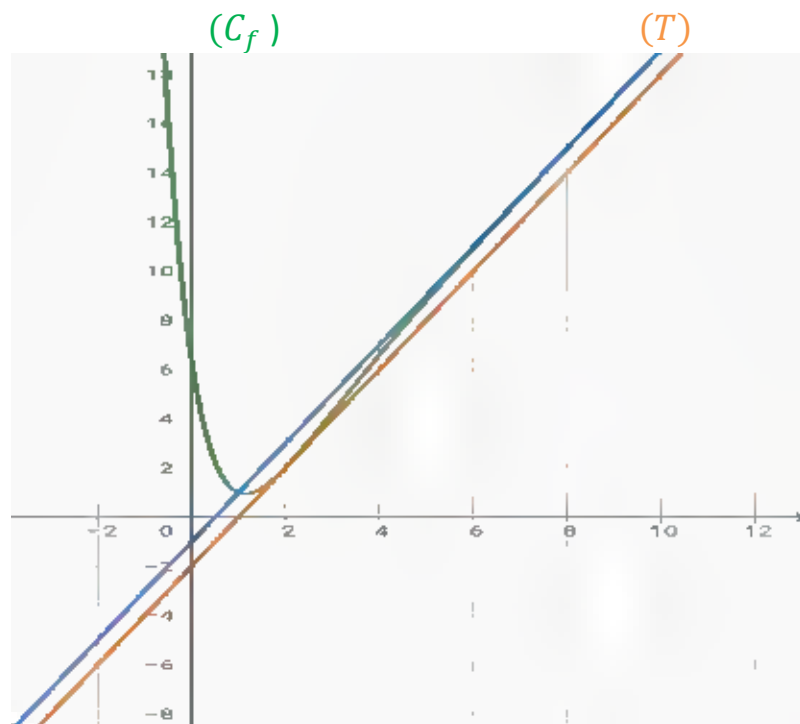
ج- نبين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) ، يطلب تعيين معادلته.
معناه: $f'(x_0) = 2$ و منه $x_0 = 2$

- معادلة المماس (T)

$$(T): y = 2x - 2$$

3 حساب كلا من: $f(0)$ و $f(2)$ ثم إنشاء (T) , (Δ) و (C_f)
 $f(0) = -1 - e^2$; $f(2) = 4$

إنشاء (T) , (Δ) و (C_f)



(Δ)

(II) الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = (x - 1) e^{-x+2}$
 (1) باستعمال المكاملة بالتجزئة نعين الدالة الأصلية H للدالة h على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم عند 0.

$H(x) = -x e^{-x+2}$
 (2) حساب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) و المستقيمين الذين معادلاتها: $x = \alpha, x=1$

$$A(\alpha) = \int_1^\alpha y - f(x) = 4e - 4\alpha e^{-\alpha+2} \text{ cm}^2$$

$$(3) \text{ نبين أن: } A(\alpha) = 8 + 4e + \frac{16}{\alpha-2} \text{ cm}^2$$

$$\text{بما أن } g(\alpha) = 0 \text{ فإن } e^{-\alpha+2} = \frac{-2}{\alpha-2}$$

$$\text{إذن } A(\alpha) = 8 + 4e + \frac{16}{\alpha-2} \text{ cm}^2$$