الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية جيجل — الموسم الدراسي: 2023م-2024م

ثانوية راشدي محمد -سيدي معروف — المستوى: الثالثة -رياضيات

اختبار الفصل الثاني في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا

**على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين ويجيب عليه:**

**الموضوع الأوّل:**

## التمرين الأول: ( 06 نقاط)

لتكن $f$ الدالة المعرفة والقابلة للإشتقاق على المجال: $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{1+ax^2}$ حيث $a\in\mathbb{R}_+-\{1\}$.

**I/** تحقق أن الدالة $f$ متزايدة تماما.

**II/** نعتبر $(u_n)$ المتتالية المعرفة بحدها الأول: $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=\sqrt{1+a(u_n)^2}$.

**1/** نفرض أن: $0<a<1$ .

ا/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0\leq u_n\leq\frac{1}{\sqrt{1-a}}$ .

**ب/** بين أن المتتالية $(u_n)$ متزايدة .

**ج/** استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة، ثم عين نهايتها.

**2/** نفرض أن: $a>1$ .

نعتبر $(v_n)$ المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=(u_{n+1}-u_n)(u_{n+1}+u_n)$ .

ا/ بين أن المتتالية $(v_n)$ هندسية، يُطلب تعيين أساسها وحدها الاول.

**ب/** اِستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $(u_{n+1})^2-(u_n)^2=a^n$ .

**ج/** نعرف على $\mathbb{N}$ المتتالية $(w_n)$ كالتالي:

$$\begin{cases} w_0=0 \\ w_n=1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-1} \quad ;n\geq 1 \end{cases}$$ .

- أكتب $w_n$ بدلالة $n$ .

**د/** بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n=\sqrt{w_n}$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ .

## التمرين الثاني: (07 نقاط)

**1/** ا/ أُدرس أولية العدد $631$ .

**ب/** تحقق أنه من أجل كل عددين حقيقيين $x$ و $y$: $x^3-y^3=(x-y)(x^2+y^2+xy)$ .

**ج/** جد جميع الثنائيات المرتبة $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق: $x^3-y^3=631$ .

**2/** لتكن المعادلة ذات المجهول $(a;b)$ من $\mathbb{Z}^2$ التالية: $1962b-1830a=18\cdots(E)$ .

ا/ بين أن المعادلة $(E)$ تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ .

**ب/** تحقق أن الثنائية $(15;14)$ حل للمعادلة $(E)$ ، ثم استنتج حلول المعادلة $(E)$ .

**ج/** عين الثنائيات الطبيعية $(a,b)$ من حلول المعادلة $(E)$ التي تحقق: $PGCD(a,b)=3$ .



منصة القلم الجزائري | DZPEN.COM

**3/** ا/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ باقي القسمة الإقليدية للعدد $9^n$ على $13$ .

**ب/** بين أنه إذا كانت الثنائية $(\alpha;\beta)$ حلا للمعادلة $(E)$ فإن: $6\times 9^{327\beta}+3^{610\alpha+2024}-1445\equiv 0[13]$ .

## التمرين الثالث: (07 نقاط)

لتكن $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln(e^x+1)}{e^{x-2}}$

و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ .

**1/** ا/ عين نهاية الدالة $f$ عند $-\infty$ .

**ب/** تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f(x)=e^2\left[\dfrac{x}{e^x}+e^{-x}\ln(e^{-x}+1)\right]$

**ج/** عين نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ .

**د/** استنتج أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين، يُطلب تعيين معادلة لكل منهما.

**2/** نعتبر الدالة $g$ المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)$ .

ا/ بين أن الدالة $g$ متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$ .

**ب/** استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ .

**3/** ا/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x)=e^{-x+2}g(e^x)$ .

**ب/** إستنتج إتجاه تغير الدالة $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

**4/** أحسب $f(0)$ ، ثم أنشئ المستقيمات المقاربة والمنحنى $(C_f)$.

**5/** لتكن $F$ الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ .

ا/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $\dfrac{1}{e^x+1}=1-\dfrac{e^x}{e^x+1}$ ، ثم أحسب: $\int_0^x \dfrac{1}{e^t+1}dt$ .

**ب/** باستعمال المكاملة بالتجزئة، بين أن: $F(x)=e^2[x-\ln(1+e^x)]-f(x)+2e^2\ln 2$ .

**ج/** أحسب $F(\ln 2)$ وفسره هندسيا، ثم عين $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ .

**انتهى الموضوع الأوّل.**



منصة القلم الجزائري | DZPEN.COM

## الموضوع الثّاني:

### التمرين الأول: (06 نقاط)

لتكن $(u_n)$ المتتالية المعرفة بـ : $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = \dfrac{a + 2au_n}{a + 1 + u_n}$ حيث $a$ عدد حقيقي.

**1/** عين قيم $a$ التي تجعل المتتالية $(u_n)$ ثابتة.

**2/** نفرض أن: $a > 3$ .

ا/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0 < u_n < a$ .

**ب/** بين أن المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما.

**ج/** استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة، ثم عين نهايتها.

**3/** نفرض أن $a = 2$ ، ونعتبر $(v_n)$ المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$ .

ا/ بين أن المتتالية $(v_n)$ هندسية، يُطلب تعيين أساسها وحدها الاول.

**ب/** أكتب $v_n$ بدلالة $n$، ثم استنتج $u_n$ بدلالة $n$ وأحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .

**ج/** أحسب بدلالة $n$ المجموع: $S_n = \dfrac{1}{1+u_0} + \dfrac{1}{1+u_1} + \cdots + \dfrac{1}{1+u_n}$ .

**4/** نفرض أن $a = -1$ ، ونعتبر $(w_n)$ المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$ .

ا/ بين أن المتتالية $(w_n)$ حسابية، يُطلب تعيين أساسها وحدها الاول.

**ب/** أكتب $w_n$ بدلالة $n$، ثم استنتج $u_n$ بدلالة $n$ وأحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .

### التمرين الثاني: (07 نقاط)

نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ التالية: $45x + 20y = 2^m - 18$ ... $(E_m)$ .

**I/1/** أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $m$ بواقي القسمة الإقليدية للعدد $2^m$ على $5$ .

**2/** عين قيم العدد الطبيعي $m$ التي تجعل المعادلة $(E_m)$ تقبل حلولا.

**II/** نضع $m = 7$ ، ونعتبر المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ التالية: $9x + 4y = 22$ ... $(E)$

**1/** ا/ تحقق أن المعادلة $(E_7)$ تقبل حلولا، ثم استنتج أن المعادلة $(E_7)$ تكافئ المعادلة: $(E)$ .

**ب/** بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة $(E)$ فإن: $x \equiv 2\,[4]$ ثم استنتج حلول المعادلة $(E)$ .

**2/** ليكن $N$ عددا طبيعيا يُكتب $\overline{133\alpha\beta3}$ في النظام ذو الأساس $4$ ، ويُكتب $\overline{56\alpha0}$ في النظام ذو الأساس $7$ ، حيث $\alpha$ و $\beta$ عددان طبيعيان.

- عين $\alpha$ و $\beta$ ، ثم أُكتب $N$ في النظام العشري.



منصة القلم الجزائري | DZPEN.COM

**3/** نعتبر: $a = 88n + 22$ و $b = 198n + 44$ ، حيث $n$ عدد طبيعي، وليكن $d = PGCD(a, b)$ .

ا/ تحقق أن الثنائية $(a; -b)$ حل للمعادلة $(E)$ ، ثم استنتج القيم الممكنة لـ $d$ .

**ب/** تحقق أن 22 يقسم كلا من $a$ و $b$ .

**ج/** باستعمال مبرهنة بيزو، بين أن العددين $(4n + 1)$ و $(9n + 2)$ أوليان فيما بينهما، ثم استنتج قيمة $d$ .

## التمرين الثالث: (07 نقاط)

لتكن $f$ الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{1 - e^x}{x^2}$

و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . (نأخذ: $\|\vec{i}\| = 2cm$ )

**1/** أحسب $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتائج هندسيا.

**2/** نعتبر الدالة $g$ المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 2(1 - e^{-x}) - x$ .

ا/ أدرس إتجاه تغير الدالة $g$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

**ب/** بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $\ln 4 < \alpha < \ln 6$ .

**ج/** استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$ .

**3/** ا/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ موجب تماما: $f'(x) = \dfrac{e^x}{x^3} g(x)$ .

**ب/** إستنتج إتجاه تغير الدالة $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

**4/** أنشئ المنحنى $(C_f)$. (نأخذ: $f(\alpha) \simeq -1.5$ )

**5/** لتكن $F$ الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ:

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1 - e^t}{t^2} dt & ; x > 0 \\ -\ln 2 & ; x = 0 \end{cases}$$ .

ا/ باستعمال المكاملة بالتجزئة، بين أنه من أجل كل $x > 0$ : $F(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{2x} - \dfrac{e^x - 1}{x} - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ .

**ب/** بين أنه من أجل كل $x > 0$ فإن: $e^x \ln 2 \leq \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln 2$ .

**ج/** أحسب $\lim\limits_{x \to 0^+} \left( \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \right)$ ، ثم استنتج أن الدالة $F$ مستمرة على يمين 0 .

**انتهى الموضوع الثاني.**

☺☺بالتوفيق للجميع☺☺



منصة القلم الجزائري | DZPEN.COM

✓ تلميذة: راشدي محمد — ✓ الموسم الدراسي: 2023/2024
- بسيدي معروف. ✓ المستوى: 03 رياضيات

متابعة الإجابة الثاني في مادة الرياضيات.

## الموضوع الأول:

$f(x)=\sqrt{1+ax^2}$ ; $D_f=[0,+\infty[$ ; $a\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}$

(I) التحقق أن $f$ متزايدة تماما:

لدينا الدالة $f$ تقبل الإشتقاق على $[0,+\infty[$ و:

$f'(x)=\frac{2ax}{\sqrt{1+ax^2}} > 0$

إذن: الدالة $f$ متزايدة تماما على $[0,+\infty[$.

(II) $(u_n)$ : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\sqrt{1+a(u_n)^2} \end{cases}$

1) نفرض: $0<a<1$ ؛

أ) البرهان بالتراجع:

نسمي $P(n)$ الخاصية: « $0\leq u_n\leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$ »

ولنثبت صحتها من أجل كل عدد طبيعي $n$.

• من أجل $n=0$ : لدينا: $u_0=0$

أي: $0\leq u_0\leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$ إذن $P(0)$ صحيحة.

• ليكن $n$ عددا طبيعيا كيفيا.

نفرض صحة $P(n)$ أي $0\leq u_n\leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

ولما أن $f$ متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

فإن: $f(0)\leq f(u_n)\leq f\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}}\right)$

لدينا: $f(0)=\sqrt{1+a(0)}=1$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}}\right)=\sqrt{1+a\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{a}{1-a}}=\sqrt{\frac{1-a+a}{1-a}}$

$=\sqrt{\frac{1}{1-a}}=\frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

ومنه: $0<1\leq u_{n+1}\leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

إذن $P(n+1)$ صحيحة بفرض صحة $P(n)$.

وبالتالي حسب مبدأ البرهان بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0\leq u_n\leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

ب) البيان أن $(u_n)$ متزايدة:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$ :

$u_{n+1}-u_n=\sqrt{1+a(u_n)^2}-u_n=\frac{1+a(u_n)^2-(u_n)^2}{\sqrt{1+a(u_n)^2}+u_n}$

$=\frac{1+(a-1)(u_n)^2}{\sqrt{1+a(u_n)^2}+u_n}$.

لدينا: $0<a<1$ : $\sqrt{1+a(u_n)^2}+u_n>0$ و

ومنه: $a-1<0$ و لدينا: $0\leq u_n\leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$

ومنه: $0\leq (u_n)^2\leq \frac{1}{1-a}$

$0\geq (a-1)(u_n)^2\geq \frac{a-1}{1-a}$

أي: $1\geq 1+(a-1)(u_n)^2\geq a$

إذن: $u_{n+1}-u_n\geq 0$ إذن $(u_n)$ متزايدة.

ج) الإستنتاج:

لدينا $(u_n)$ متزايدة ومحدودة من الأعلى

إذن $(u_n)$ متقاربة.

تعيين نهايتها:

$\lim_{n\to+\infty} u_n=l\in\mathbb{R}$ متقاربة $(u_n)$ لأن:

ومنه: $l=\sqrt{1+al^2}$

أي: $l^2=1+al^2$ ومنه $1+(a-1)l^2=0$

ومنه: $l^2=\frac{1}{1-a}$ إذن: $l=\pm\sqrt{\frac{1}{1-a}}$

وبما أن $0\leq u_n$ فإن: $\lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

ج) نفرض $a>0$ :

$v_n=(u_{n+1}-u_n)(u_{n+1}+u_n)=(u_{n+1})^2-(u_n)^2$.

أ) تبيان أن $(v_n)$ هندسية:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$ :

$v_{n+1}=(u_{n+2})^2-(u_{n+1})^2=1+a(u_{n+1})^2-1-a(u_n)^2$

$=a\left((u_{n+1})^2-(u_n)^2\right)=av_n$

إذن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q=a$

وحدها الأول: $v_0=(u_1)^2-(u_0)^2=\sqrt{1}^2=1$

ب) الإستنتاج:

بما أن $(v_n)$ متتالية هندسية فإن:

$v_n=v_0\times q^n=1\times a^n=a^n$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $(u_{n+1})^2-(u_n)^2=a^n$

ج) كتابة $w_n$ بدلالة $n$:

$w_n=1+a+a^2+\dots+a^{n-1}$

$=1\times\left(\frac{a^n-1}{a-1}\right)=\frac{a^n-1}{a-1}=w_n$



DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

Scanné avec CamScanner

1- التباين:

$w_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$

$= q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^{n-1}$

$= (u_1)^2 - (u_0)^2 + (u_2)^2 - (u_1)^2 + \dots + (u_n)^2 - (u_{n-1})^2$

$= -(u_0)^2 + (u_n)^2 - (u_n)^2$

$u_n \geq 0$ ومنه $|u_n| = \sqrt{w_n}$ ومنه $u_n = \sqrt{w_n}$ (2ن)

نهاية المتتالية:

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{q^n - 1}{q-1}} = +\infty$

التمرين الثاني:

1) أ) دراسة أولية العدد 631: لدينا $\sqrt{631} \approx 25,12$

| القاسم : | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| قابلية القسمة | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ |

العدد 631 لا يقبل القسمة على أي عدد أولي أصغر من $\sqrt{631}$ إذن العدد 631 عدد أولي.

ب) التحقق: من أجل كل عددين x و y:

$(x-y)(x^2+y^2+xy) = x^3 + xy^2 + x^2y - yx^2 - y^3 - xy^2$

$= x^3 - y^3$.

ج- إيجاد الثنائيات الطبيعية (x;y) بحيث:

$(x-y)(x^2+y^2+xy) = 631$ تكافئ $x^3 - y^3 = 631$

إذن $x-y \mid 631$ ، $x^2+y^2+xy \mid 631$

بما أن x و y أعداد طبيعية فإن $x-y < x^2+y^2+xy$

ومنه $x = 1+y$ ومنه $\begin{cases} x-y = 1 \\ x^2+y^2+xy = 631 \dots (*) \end{cases}$ :على

بالتعويض في (*) نجد:

$(1+y)^2 + y^2 + (1+y)y = 1 + y^2 + 2y + y^2 + y + y^2$

$\Rightarrow 3y^2 + 3y + 1 = 631$

$3y^2 + 3y - 630 = 0$ ومنه لدينا

$\Delta = (3)^2 - 4(3)(-630) = 7569 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 87$

$y = \frac{-3-87}{2(3)} = \frac{-90}{6} = -15 \notin \mathbb{N}$ ومنه

$y = \frac{-3+87}{2(3)} = \frac{84}{6} = 14 \in \mathbb{N}$

$x = 1+14 = 15 = x$ ومنه $y = 14$ :إذن

$(x,y) = (15,14)$ :إذن

ج- (E) ... $1962b - 1830a = 18$

أ- تبيان أن (E) تقبل حلول:

لدينا:

$1962 = 1830 \times 1 + 132$

$1830 = 132 \times 13 + 114$

$132 = 114 \times 1 + 18$

$114 = 18 \times 6 + 6$

$18 = 6 \times 3 + 0$

إذن $PGCD(1962, 1830) = 6$ وبما أن $6 \mid 18$ فإن المعادلة (E) تقبل حلول في $\mathbb{Z}^2$.

ب) التحقق:

لدينا $1962(14) - 1830(15) = 27468 - 27450 = 18$

إذن الثنائية $(15;14)$ حل للمعادلة (E).

# جدول المعادلة (E): لدينا:

$1962b - 1830a = 18$

$1962(14) - 1830(15) = 18$ بطرح طرفا لطرف نجد:

$1962(b-14) - 1830(a-15) = 0$

$6 \times (327(b-14) - 305(a-15)) = 0$ ومنه

$327(b-14) = 305(a-15)$ ... (1) أي:

$327 \wedge 305 = 1$ وبما أن: $327 \mid 305(a-15)$ فإن: $327 \mid a-15$

$a = 327k + 15$ أي $a - 15 = 327k$ :ومنه

بالتعويض في (1) نجد: $327(b-14) = 305(327k)$

$b = 305k + 14$ :ومنه $b - 14 = 305k$ :إذن

$(a,b) = (327k+15; 305+14)$ :إذن

حيث $k \in \mathbb{Z}$.

ج- تعيين (a,b) حيث $a \wedge b = 3$:

معناه: $3 \mid a$ و $3 \mid b$ أي $a \equiv 0\ [3]$ و $b \equiv 0\ [3]$

ومنه $\begin{cases} 327k + 15 \equiv 0\ [3] \\ 305 + 14 \equiv 0\ [3] \end{cases}$ بالطرح طرفا لطرف نجد:

$2k + 1 \equiv 0\ [3]$

$2k \equiv -1\ [3]$ وبما أن $2 \equiv -1\ [3]$ فإن:

$-2k \equiv k\ [3]$ إذن: $k \equiv 2\ [3]$

وعليه $k = 3q + 2$ حيث $q \in \mathbb{N}$

$a = 327(3q+2) + 15 = 981q + 669$

$b = 305(3q+2) + 14 = 915q + 624$

إذن: $(a,b) = (981q + 669; 915q + 624)$ ; $q \in \mathbb{N}$

3- أ) دراسة بواقي قسمة $q^n$ على 13:

لدينا $\begin{cases} q^0 \equiv 1\ [13] \\ q^1 \equiv 9\ [13] \\ q^2 \equiv 3\ [13] \\ q^3 \equiv 1\ [13] \end{cases}$ إذن:

| $n =$ | $3k$ | $3k+1$ | $3k+2$ |
|---|---|---|---|
| $r_n =$ | 1 | 9 | 3 |

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

Scanné avec CamScanner

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^2\left(\frac{x}{e^x} + e^{-x}\ln(e^x+1)\right)$ -1.أ

$= 0$

$\frac{x}{e^x} \to 0$ ، $e^{-x}\ln(e^x+1) \to 0$

ب- التفسير البياني: المستقيم $(C_f)$ مقارب مواز لـ $(xx')$ بجوار $+\infty$، معادلته: $y = e^2$

ج- $D_g = ]-1;+\infty[$ ; $g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$

1- تبيان أن $g$ متناقصة تماما على $[0;+\infty[$:

$g$ قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ لدينا:

$g'(x) = \frac{1(x+1)-1(x)}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{1-x-1}{(x+1)^2}$

$= \frac{-x}{(x+1)^2}$

| $x$ | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $0$ | $-$ |

إذن $g$ متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

ب- $g(0) = 0$ ، لدينا $g$ متناقصة على $[0;+\infty[$ إذن من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ فإن $g(x) < g(0)$

ومنه $g(x) < 0$.

3- أ- التحقق من الاستنتاج:

$f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لدينا من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$:

$f'(x) = -e^{-x+2}\ln(e^x+1) + \frac{e^x}{e^x+1}e^{-x+2}$

$= e^{-x+2}\left(\frac{e^x}{e^x+1} - \ln(e^x+1)\right) = e^{-x+2}g(e^x)$

$\Pi = 704 + 741j$

$\Pi = 0 + 5i + 2\times5^2 + 5^3j + 2\times5^4$

$\Pi = 5i + 125j + 1300$

$704 + 741j = 5i + 125j + 1300$ ومنه

$616j = 5i + 596$.

$0 \le i \le 4$ و $0 \le j \le 2$ لدينا

| $j =$ | $0$ | $1$ | $2$ | الأزواج |
|---|---|---|---|---|
| $i =$ | $\frac{-596}{5}$ | $4$ | $\frac{636}{5}$ | ممكن: |
| | ✗ | نعم | ✗ | المقبول: |

ومنه $(i;j) = (4;1)$

$\Pi = 704 + 741(1) = 1445 = \Pi$

التمرين الثالث:

$f(x) = \frac{\ln(e^x+1)}{e^{x-2}}$ ; $D_f = \mathbb{R}$

1- أ- تعيين النهايات:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln(e^x+1)}{e^{x-2}}\right) = \lim_{t\to0} e^2\left(\frac{\ln(t+1)}{t}\right)$

$= e^2$ (لأن $t = e^x$)

ب- التحقق: لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x$:

$e^2\left(\frac{x}{e^x} + e^{-x}\ln(e^x+1)\right) = \left(\frac{x+\ln(e^{-x}+1)}{e^x}\right)e^2$

$= \frac{x+\ln(e^{-x}(1+e^x))}{e^{x-2}} = \frac{x-x+\ln(1+e^x)}{e^{x-2}}$

$= f(x)$.

$6\times9^{327\beta} + 3^{610\alpha+2024} - 1445 \equiv 0[13]$ تبيان أن: 1.ج

حيث $(\alpha;\beta)$ حل لـ $(E)$.

$327\beta - 305\alpha = 3$ ومنه

لدينا $6\times9^{327\beta} + 3^{610\alpha+2024} = 6\times9^{327\beta} + 9^{305\alpha+1012}$

$= 9^{327\beta}\left(6 + 9^{305\alpha+1012-327\beta}\right)$

$= 9^{327\beta}\left(6 + 9^{-3+1012}\right)$

$= 9^{327\beta}\left(6 + 9^{1009}\right)$

(1) $9^{327\beta} \equiv 1[13]$ ، ومنه $327\beta = 3(109\beta)$ لدينا

$9^{1009} \equiv 9[13]$ ، ومنه $1009 = 3(336)+1$ لدينا

(2) $6 + 9^{1009} \equiv 2[13]$ ومنه $(6+9=15)$

إذن بجمع طرفي (1) و(2) نجد:

(3) $9^{327\beta}(6+9^{1009}) \equiv 2[13]$

إذن: $6\times9^{327\beta} + 3^{610\alpha+2024} \equiv 2[13]$ ...(3)

لدينا $1445 = 13\times(111) + 2$

ومنه $1445 \equiv 2[13]$ ... (4)

من (3) و(4) نجد:

$6\times9^{327\beta} + 3^{610\alpha+2024} - 1445 \equiv 2-2[13]$

إذن $6\times9^{327\beta} + 3^{610\alpha+2024} - 1445 \equiv 0[13]$

ب- $\Pi = \overline{j2ej2j2}^{13} = \overline{ajio}^{5}$ لدينا

$\Pi = 2 + 3j + 3^2j + 3^3\times2 + 3^4\times2 + 3^5\times2 + 3^6j$ ومنه



DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

Scanné avec CamScanner

لدينا من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $e^x > 0$ إذن $e^x + 1 > 0$ و $g(e^x) \leq 0$ أي $f'(x) \leq 0$

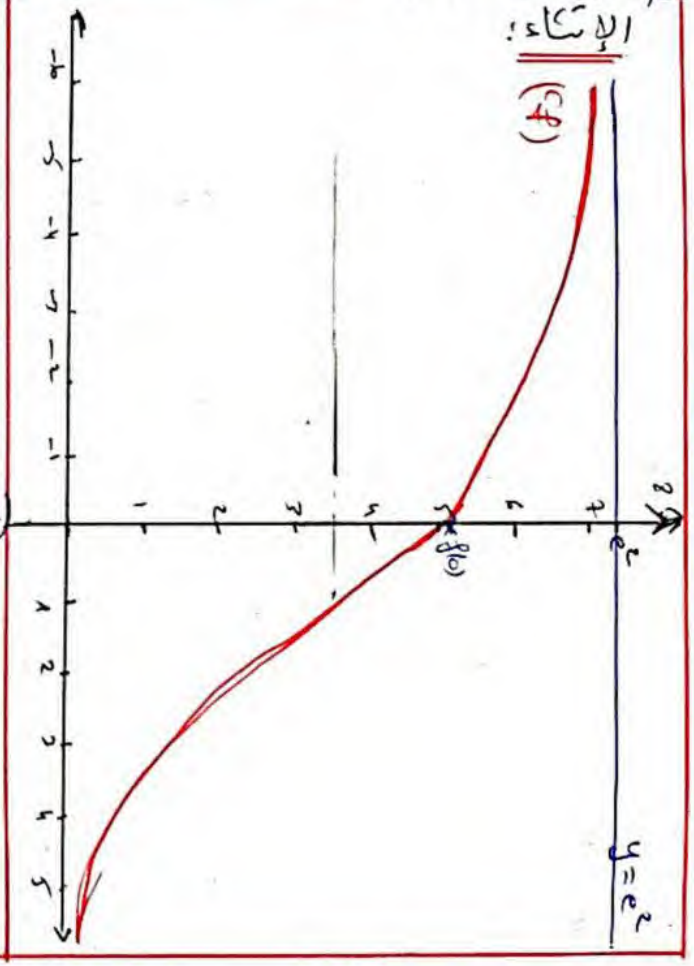
إذن الدالة $f$ متناقصة على $\mathbb{R}$.

# جدول تغيرات الدالة $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $e^2$ | ↘ | $0$ |

4- $f(0) = e^2 \ln(2) \approx 12$

الإنشاء:




5- $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ ; $x \in [0, +\infty[$

1- التحقق:

لدينا من أجل كل $x$ عدد حقيقي:

$$1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1}.$$

ومنه: $\int_0^x \frac{1}{e^t+1}dt = \int_0^x \left(1 - \frac{e^t}{e^t+1}\right)dt$

$$= \left[t - \ln(e^t+1)\right]_0^x = x - \ln(e^x+1) + \ln 2$$

ب/ الاستنتاج: لدينا

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x e^{-t+2} \ln(e^t+1)\,dt$$

نضع: $\begin{cases} u(t) = \ln(e^t+1) \\ v'(t) = e^{-t+2} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u'(t) = \frac{e^t}{e^t+1} \\ v(t) = -e^{-t+2} \end{cases}$

$$F(x) = \left[-e^{-t+2}\ln(e^t+1)\right]_0^x - \int_0^x -\frac{e^t}{e^t+1}e^{-t+2}dt$$

$$= -e^{-x+2}\ln(e^x+1) + e^2\ln 2 + \int_0^x \frac{e^2}{e^t+1}dt$$

$$= -f(x) + e^2\ln 2 + e^2\left(x - \ln(e^x+1) + \ln 2\right)$$

$$F(x) = e^2\left(x - \ln(e^x+1)\right) + 2e^2\ln 2 - f(x)$$

* الدالة $F$ هي الدالة الأصلية للدالة $f$ على $[0, +\infty[$ والتي تنعدم عند $x = 0$.

ج- حساب $F(\ln 2)$:

$$F(\ln 2) = e^2(\ln 2 - \ln 3) + 2e^2\ln 2 - e^2\ln 3$$

$$= e^2\left(\ln 2 + 2\ln 2 - \ln 3 - \frac{1}{2}\ln 3\right)$$

$$F(\ln 2) = e^2\left(3\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3\right)$$

1- التفسير الهندسي: $F(\ln 2)$ هو مساحة الحيز المحدود بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيمات ذات المعادلات: $x = 0$ ، $x = \ln 2$ ، $y = 0$.

2- الحساب:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^2\left(x - \ln(1+e^x)\right) - f(x) + 2e^2\ln 2\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(e^2\left(\ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)\right) - f(x) + 2e^2\ln 2\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(e^2\left(\ln\left(\frac{1}{e^{-x}+1}\right)\right) - f(x) + 2e^2\ln 2\right)$$

$$= 2e^2\ln 2$$

## التمرين الأول

تابع للموضوع

$$e^x\ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt \leq e^{2x}\ln 2$$ ومنه:

1- حساب النهاية:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x\ln 2 =$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{2x}\ln 2 = \ln 2$$

ومنه: $\lim_{x\to-\infty}\left(\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\right) = \ln 2$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x} + \frac{e^x-1}{x} - \int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\right)$$

$$= 1 - 1 - \ln 2$$

$$= -\ln 2 = F(0)$$

إذن $F$ مستمرة على العدد 0.

تابع للموضوع

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

Scanné avec CamScanner

الموضوع الثاني :

التمرين الأول :

$$(u_n):\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{a + 2a u_n}{a+1+u_n} \end{cases} ; \quad a \in \mathbb{R}.$$

1) - تعيين قيم a بحيث تكون $(u_n)$ ثابتة :

$(u_n)$ ثابتة معناه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = u_n = u_0 = 3$ ومنه $3 = \dfrac{a + 2a \times 3}{a+1+3}$

ومنه $3(a+4) = 7a$

ومنه $12 = 4a$ إذن $a = \dfrac{12}{4} = 3 = a$

2) - نفرض أن $a > 3$ :

أ/ البرهان بالتراجع :

نبين أن $0 < u_n < a$ ولتثبيت ذلك نعتبر $p(n)$ الخاصية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$.

- من أجل $n = 0$ : لدينا $u_0 = 3$ ومنه $0 < u_0 \leq 3 < a$ إذن $p(0)$ محققة.
- نفرض صحة $p(n)$ أي : $0 < u_n < a$ حيث $n$ عددا طبيعيا كيفيا.
- نبين صحة $p(n+1)$ أي : $0 < u_{n+1} < a$.

لدينا $u_{n+1} = \dfrac{a + 2a u_n}{a+1+u_n}$ ومنه $u_{n+1} = 2a - \dfrac{a(1+2a)}{a+1+u_n}$

ومنه $a+1 < a+1+u_n < 2a+1$ لدينا $0 < u_n < a$

ومنه $\dfrac{1}{2a+1} < \dfrac{1}{a+1+u_n} < \dfrac{1}{a+1}$ ومنه

$\dfrac{-a(1+2a)}{a+1} < \dfrac{-a(1+2a)}{a+1+u_n} < \dfrac{-a(1+2a)}{2a+1}$

ومنه $2a - \dfrac{a(2a+1)}{a+1} < 2a - \dfrac{a(1+2a)}{a+1+u_n} < 2a - a$

إذن $\dfrac{2a^2 + 2a - 2a^2 - a}{a+1} < u_{n+1} < a$

أي $0 < \dfrac{a}{a+1} < u_{n+1} < a$.

إذن $p(n+1)$ محققة بفرض أن $p(n)$ صحيحة.

ب/ تبيان أن $(u_n)$ متزايدة تماما :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$ :

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{a + 2a u_n}{a+1+u_n} - u_n = \dfrac{a + 2a u_n - a u_n - u_n - (u_n)^2}{a+1+u_n}$

$= \dfrac{-(u_n)^2 + (a-1)u_n + a}{a+1+u_n}$

لدينا باعتبار كثير الحدود : $-X^2 + (a-1)X + a$

$\Delta = (a-1)^2 - 4(-1)(a) = a^2 - 2a + 1 + 4a$

$= a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 > 0$

ومنه $\sqrt{\Delta} = a+1$.

ومنه حلول هذه المعادلة هي :

$X_1 = \dfrac{1 - a - a - 1}{2(-1)} = a$

$X_2 = \dfrac{1 - a + a + 1}{2(-1)} = -2$

| $X$ | $-\infty$ | $-2$ | $a$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $-X^2 + (a-1)X + a$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

ومنه من أجل $0 < u_n < a$ : $-(u_n)^2 + (a-1)u_n + a > 0$

إذن : $u_{n+1} - u_n > 0$ إذن $(u_n)$ متزايدة تماما.

ج/ - الاستنتاج :

$(u_n)$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بحيث متقاربة.

# تعيين نهايتها : نضع $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

ومنه $\ell = \dfrac{a + 2a\ell}{a+1+\ell}$

ومنه $\ell(a+1+\ell) = a + 2a\ell$

أي $\ell^2 + (a+1)\ell - 2a\ell - a = 0$

أي $\ell^2 + (1-a)\ell - a = 0$

$-\ell^2 + (a-1)\ell + a = 0$

$\ell = -2$ أو $\ell = a$ مرفوض لأن $0 < u_n < a$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$

3) - نفرض $a = 2$ : $(v_n)$ حيث $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$.

أ/ تبيان أن $(v_n)$ هندسية :

لدينا $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 1} = \dfrac{\frac{2 + 4u_n}{3 + u_n} - 2}{\frac{2 + 4u_n}{3 + u_n} + 1} = \dfrac{2 + 4u_n - 6 - 2u_n}{2 + 4u_n + 3 + u_n}$

$= \dfrac{-4 + 2u_n}{5 + 5u_n} = \dfrac{2(u_n - 2)}{5(u_n + 1)}$.

$= \dfrac{2}{5} v_n$

إذن : $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{2}{5}$ وحدها الأول : $v_0 = \dfrac{3-2}{3+1} = \dfrac{1}{4}$



DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

Scanné avec CamScanner

$v_n = v_0 \times q^n$ ، بما أنها متتالية هندسية، إذن الحد العام:

$v_n = \frac{1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

لدينا $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1} = 1 - \frac{3}{u_n + 1}$، ومنه $-\frac{3}{u_n+1} = v_n - 1$، أي $u_n + 1 = \frac{-3}{v_n - 1}$

ومنه $u_n = \frac{3}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n} - 1$ ، أي $u_n = \frac{3}{1 - v_n} - 1$

$\lim u_n = \lim_{n \to +\infty} \left( \frac{3}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n} - 1 \right) = 3 - 1 = 2$

جـ- حساب المجموع:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$:

$\frac{1}{u_{n+1}} = -\frac{1}{3}(v_n - 1)$ ومنه $-\frac{3}{u_n + 1} = v_n - 1$

$= -\frac{1}{3} v_n + \frac{1}{3}$.

ومنه $S_n = \frac{1}{1+u_0} + \frac{1}{1+u_1} + \cdots + \frac{1}{1+u_n}$

$= \left(-\frac{1}{3} v_0 + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3} v_1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{3} v_n + \frac{1}{3}\right)$

$= -\frac{1}{3}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3}\right)$

$= -\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \left( \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{2}{3}} \right) + \frac{1}{3}(n - 0 + 1)$

$= -\frac{1}{12} \left( \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} \right) + \frac{1}{3}(n+1)$

$= -\frac{5}{36} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{3}(n+1) = S_n$

---

$u_{n+1} = \frac{-1 - 2u_n}{u_n}$ ، أي $a = -1$ نضع -4

ونضع: $w_n = \frac{u_n + 2}{u_n + 1} = 1 + \frac{1}{u_n + 1}$.

ب- تبيان أن: $(w_n)$ حسابية:

$w_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{-1 - 2u_n}{u_n} + 2}{\frac{-1 - 2u_n}{u_n} + 1}$

$= \frac{-1 - 2u_n + 2u_n}{-1 - 2u_n + u_n} = \frac{-1}{-1 - u_n}$

$= \frac{1}{1 + u_n} = w_n - 1$.

$r = -1$ ومنه $(w_n)$ متتالية حسابية أساسها

حدها الأول: $w_0 = \frac{3+2}{3+1} = \frac{5}{4}$.

جـ- عبارة الحد العام:

$w_n = w_0 + nr$

$= \frac{5}{4} + (-1)n = \frac{5}{4} - n = w_n$

لدينا $w_n - 1 = \frac{1}{u_n + 1}$ ومنه $u_n + 1 = \frac{1}{w_n - 1}$

ومنه $u_n = \frac{1}{w_n - 1} - 1$

أي: $u_n = \frac{1}{\frac{5}{4} - n - 1} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{4} - n} - 1$

ومنه $\lim_{n \to +\infty} u_n = -1$

---

1- التحقق أن $(E_7)$ تقبل حلولا:

لدينا $(E_7)$ من أجل $m = 7 = 4(1) + 3$

إذن $(E_7)$ تقبل حلولا.

ب- استنتاج حلول المعادلة $45x + 20y = 110$

$9x + 4y = 22$ أي $5(9x) + 5 \times 4y = 5 \times 22$

إذن $(E_7)$ تكافئ $(E)$.

---

التمرين الثاني:

$(E_m) \cdots 45x + 20y = 2^m - 18$ ; $m \in \mathbb{N}$

I- دراسة بواقي قسمة $2^m$ على 5:

| $m =$ | $4k$ | $4k+1$ | $4k+2$ | $4k+3$ |
|---|---|---|---|---|
| $r_m =$ | 1 | 2 | 4 | 3 |

حسب طريقة

$2^0 \equiv 1 \ [5]$

$2^1 \equiv 2 \ [5]$

$2^2 \equiv 4 \ [5]$

$2^3 \equiv 3 \ [5]$

$2^4 \equiv 1 \ [5]$

ب- حتى تقبل $(E_m)$ حلولا يجب:

إذن $PGCD(45;20) \mid 2^m - 18$

$45 = 20 \times 2 + 5$

$20 = 5 \times 4 + 0 \Rightarrow 45 \wedge 20 = 5$

إذن $2^m - 18 \equiv 0 \ [5]$ أي $5 \mid 2^m - 18$

ومنه $2^m \equiv 18 \ [5]$ أي $2^m \equiv 3 \ [5]$.

ومنه $m = 4k + 3$ ; $k \in \mathbb{N}$

II- $m = 7$ يعني $(E_7) \cdots 45x + 20y = 110$

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

Scanné avec CamScanner

التمرين الثالث:

$f(x)=\frac{1-e^x}{x^2}$ $\quad D_f=]0,+\infty[$

1- حساب النهايات:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{e^x}{x^2}\right)=-\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\times(-1)\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\right]$ ($\frac{1}{x}\to+\infty$)

$=-\infty$

التفسير الهندسي: $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=0$ مقاربا بجوار 0 من اليمين.

$g(x)=2(1-e^{-x})-x$ ; $D_g=]0,+\infty[$

1- دراسة اتجاه تغير الدالة g:

لدينا من أجل كل $x$ من $]0,+\infty[$:

$g'(x)=2e^{-x}-1$.

| $2e^{-x}-1>0$ | $2e^{-x}-1=0$ |
|---|---|
| $2e^{-x}>1$ | $2e^{-x}=1$ |
| $e^{-x}>\frac{1}{2}$ | $e^{-x}=\frac{1}{2}$ |
| $-x>\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ | $-x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ |
| $x<\ln 2$ | $x=\ln 2$ |

| $x$ | 0 | $\ln 2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | + 0 | − |

ومنه g متزايدة تماما على المجال $]0;\ln 2]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\ln 2;+\infty[$.

$k=0$ أي $\begin{cases}-\frac{1}{2}\le k\le\frac{1}{4}\\ \frac{1}{9}\ge k\ge-\frac{2}{9}\end{cases}$ ومنه $k\in\left[-\frac{2}{9};\frac{1}{4}\right]$

ومنه $(\alpha;\beta)=(2,1)$

ب- التخمين: $N=7(2)+2009$ بالتعويض في N نجد

$=14+2009=2023=N$.

3- $a=88n+22$ و $b=198n+44$

$d=PGCD(a,b)$.

أ- التحقق: لدينا

$9a+4(-b)=9(88n+22)-4(198n+44)$

$=792n+198-792n-176$

$=22$

إذن: $(a;-b)$ حل للمعادلة $(E)$.

ب- استنتاج قيم d: لدينا $d|a$ و $d|b$

ومنه $d|9a-4b$ أي $d|22$

ومنه $d\in D_{22}=\{22;11;2;1\}$

ج- التحقق: لدينا $a=22(4n+1)$

و $b=22(9n+2)$

إذن $22|a$ و $22|b$.

د- لدينا $9(4n+1)-4(9n+2)=9-8$

$=1$

إذن حسب مبرهنة بيزو العددان $(4n+1)$ و $(9n+2)$ أوليان فيما بينهما.

ومنه $PGCD(a,b)=22\,PGCD(9n+2;4n+1)$.

$=22\times1=22$

أ- حل المعادلة $(E)$ حيث $(x,y)$ حل لها

$9x=4(-y)+22$ ومنه $9x+4y=22$

$=4(-y)+4(5)+2$

$=4(-y+5)+2$

$9\equiv1[4]$ بما أن $9x\equiv2[4]$ نكتب:

$x\equiv2[4]$ إذن $9x\equiv x[4]$ نكتب

حلول المعادلة $(E)$ لدينا $x\equiv2[4]$

$x=4k+2$ ; $k\in\mathbb{Z}$ : نضع

بالتعويض في $(E)$ نجد

$9(4k+2)+4y=22$

$9\times4k+4y=22-18$ ومنه

$4y=-9\times4k+4$ أي

$y=-9k+1$ ; $k\in\mathbb{Z}$ أي

إذن $(x,y)=(4k+2;-9k+1)$; $k\in\mathbb{Z}$

ب- $N=\overline{133\alpha\beta3}^4=\overline{56\alpha0}^7$

نعلم أن $3+4\beta+16\alpha+3\times4^3+3\times4^4+4^5$

$=0+7\alpha+7^2\times6+5\times7^3$

أي $4\beta+16\alpha+1987=7\alpha+2009$

ومنه $9\alpha+4\beta=22$

إذن $(\alpha;\beta)=(4k+2;-9k+1)$

لكن: $0\le\alpha\le3$ $\Rightarrow$ $0\le\beta\le3$.

أي $0\le-9k+1\le3$ $\Rightarrow$ $0\le4k+2\le3$



DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

Scanné avec CamScanner

جدول تغيراتها

| $x$ | $0$ | | $\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $0$ | ↗ | $1-\ln 2$ | ↘ | $-\infty$ |

$\lim_{x\to 0^{>}} g(x)=0$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

$g(\ln 2)=1-\ln 2$

ج- الدالة $g$ موجبة على $]0;\ln 2]$

ومستمرة على $[\ln 2;+\infty[$ و: $g(\ln 2)>0$

و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty<0$

وبما أنها متناقصة تماما على هذا المجال

إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$

ولدينا $g(\ln 4)=\frac{3}{2}-\ln 4>0$

$g(\ln 6)=\frac{5}{3}-\ln 6<0$.

ومنه $\ln 4<\alpha<\ln 6$.

إشارة $g(x)$:

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |

3)-أ/ المشتقة: من أجل كل عدد حقيقي $x$ موجب تماما

$f'(x)=\frac{-e^x(x^2)-2x(1-e^x)}{(x^2)^2}=\frac{-x^2e^x+2xe^x-2x}{x^4}$

$=\frac{-xe^x+2e^x-2}{x^3}$

$=\frac{e^x}{x^3}(-x+2-2e^{-x})$

$=\frac{e^x}{x^3}(2(1-e^{-x})-x)=\frac{e^x}{x^3}g(x)$

ب- وعليه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على $]0;\alpha]$

إذن الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha]$

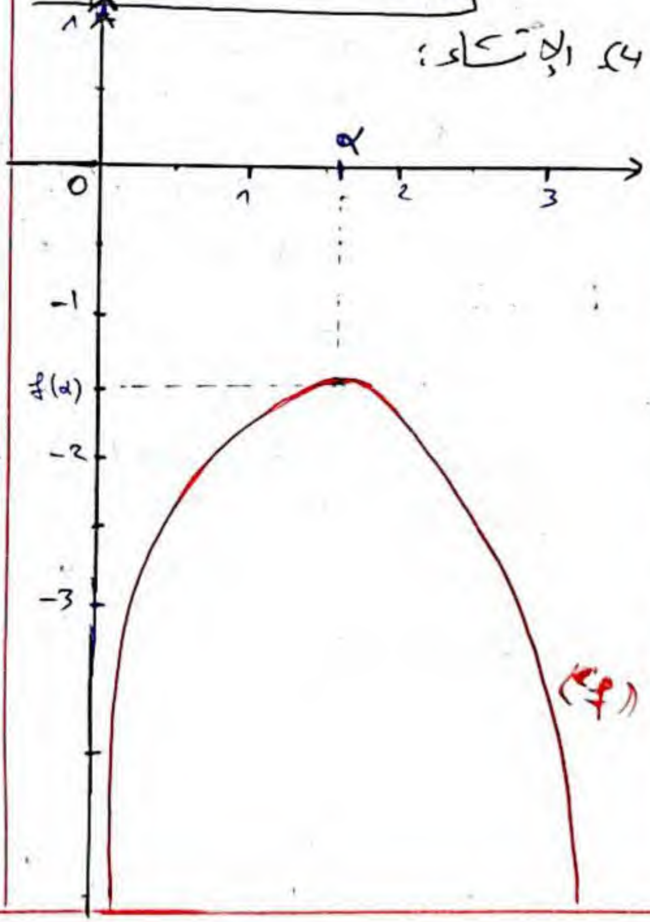
ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

جدول التغيرات

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $-\infty$ |

$f(\alpha)\simeq -1{,}5$

4) الإنشاء:




5-1) $F(x)=\begin{cases}\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}dt & ; x>0\\ -\ln 2 & ; x=0\end{cases}$

أ- الإثبات: من أجل كل $x>0$ لدينا:

$F(x)=\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}dt=\int_x^{2x}\frac{1}{t^2}\cdot(1-e^t)\,dt$

بوضع: $\begin{cases}u(t)=1-e^t\\ v'(t)=\frac{1}{t^2}\end{cases}$ فإن: $u'(t)=-e^t$ ، $v(t)=-\frac{1}{t}$.

وعليه:

$F(x)=\left[\frac{1-e^t}{-t}\right]_x^{2x}-\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$

$F(x)=\frac{e^{2x}-1}{2x}-\frac{e^x-1}{x}-\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.

ب- التبيان: لدينا $0<x\le t\le 2x$

ومنه $e^x\le e^t\le e^{2x}$ ومنه $\frac{e^x}{t}\le\frac{e^t}{t}\le\frac{e^{2x}}{t}$

إذن $\int_x^{2x}\frac{e^x}{t}dt\le\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\le\int_x^{2x}\frac{e^{2x}}{t}dt$

لدينا $\int_x^{2x}\frac{e^x}{t}=e^x\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt=e^x[\ln t]_x^{2x}$

$=e^x(\ln 2x-\ln x)$

$=e^x\ln 2$

و لدينا $\int_x^{2x}\frac{e^{2x}}{t}=e^{2x}\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt=e^{2x}[\ln t]_x^{2x}$

$=e^{2x}(\ln 2x-\ln x)=e^{2x}\ln 2$



DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

Scanné avec CamScanner