



المدة: 03 سا و 30د

إختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $]-3; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = \frac{3x+4}{x+3}$

ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بعدها الأول -1 ، u_0

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$ (أنظر الشكل المقابل)

أ- أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل ثم ضع تخمينا حول اتجاه

تغير المتتالية (u_n) ونقارها .

ج- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1 \leq u_n < 2$

3- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة

4- لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$ يطلب تعيين حدها الأول.

ب- أكتب كلا من u_n و v_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

ج- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

د- واستنتج بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_n}$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1- حل في C المعادلة $(z + \sqrt{3} - i)(z - 2i)(z^2 - 8\sqrt{3}z + 64) = 0$

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D

التي لواحقتها على الترتيب $Z_A = 4\sqrt{3} - 4i$ ، $Z_B = 4\sqrt{3} + 4i$ ، $Z_C = -\sqrt{3} + i$ و $Z_D = 2i$

2- أ- أكتب Z_A و Z_B على الشكل الأسّي .

ب- بين أن العدد Z_B^{1962} حقيقي.

ج- أحسب الأطوال OA ، OB و AB ، واستنتج طبيعة المثلث OAB .

3- نسمي G مرجح الجملة المثقلة $\{(O, -1); (D, 1); (B, 1)\}$

أ- تحقق من وجود G وبين أن لاحقتها $Z_G = 4\sqrt{3} + 6i$

ب- بين أن الرباعي $OBGD$ متوازي أضلاع .

ج- ماهي طبيعة المثلث AGC ؟

التمرين الثالث: (04 نقاط)

تتكون جمعية من 10 رجال و 5 نساء من بينهم رجل واحد اسمه زيد ، نريد تشكيل لجنة مكونة من : رئيس ، نائب ، كاتب و أميناً للمال .

- (1) - ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها ؟
- (2) - احسب احتمال كل من الأحداث التالية :
A " اللجنة تضم زيد في منصب الرئيس "
B " اللجنة تضم ثلاث رجال على الأكثر "
C " اللجنة تضم إمرأتان على الأقل "
- (3) - علما أن اللجنة تضم إمرأتان على الأقل ، ماهو احتمال أن يكون فيها زيد في منصب الرئيس ؟
- (4) - ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل اختيار عدد الرجال في اللجنة المكونة (أ) - عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله
(ب) - أحسب $E(X)$

(د) - أحسب احتمال الحدث $\ln X > 0$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- (I) - نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$
(1) - أحسب نهاية الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.
(2) - أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .
(3) - استنتج من أجل كل x من $]0; +\infty[$ إشارة $g(x)$.
- (II) - نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{x}$
وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 2cm)
(1) - أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .
(2) - أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
(3) - بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x + \frac{1}{2}$ y مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$
(ب) - ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) .
(4) - بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ لدينا : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
(ب) - إستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها
(5) - أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .
(6) - بين أن المعادلة $f(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]\frac{1}{2}; 1[$.
(6) - أرسم (T) ، (Δ) و (C_f) .

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$

- (1) - أحسب $h'(x)$ ، ماذا تستنتج؟
- (2) - أحسب بالسنتيمتر مربع S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها 0 ، y ، 1 و $x = e$ و x

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{6u_n - 2}{u_n + 3} \end{cases} \quad \text{نعتبر المتتالية العددية } (u_n) \text{ و المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ:}$$

- (1) - تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 6 - \frac{20}{u_n + 3}$
- (ب) - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$
- (2) أ - أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
ب - استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .
- (3) أ - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 2 - u_{n+1} \leq \frac{8}{9}(2 - u_n)$
ب - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 2 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{8}{9}\right)^n$
- (ج) - أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U على 10 كريات ، منها خمس كريات حمراء مرقمة بـ: -2 ، -1 ، 0 ، 1 و 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: -1 ، 0 و 1 وكريتين سوداوين مرقمتين بـ -1 و 1 .

و يحتوي صندوق V على 9 كريات ، منها خمس كريات حمراء مرقمة بـ: 1 ، 1 ، 2 ، 2 و 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: -3 ، -2 و 3 وكرية سوداء مرقمة بـ: -1 . (لا يمكن التمييز بينها باللمس) .

نسحب عشوائيا أربع كريات في آن واحد من أحد الصندوقين بالكيفية الآتية :

نقوم بسحب بطاقة واحدة عشوائيا من الصندوق W به 5 بطاقات متماثلة ، منها ثلاث بطاقات بيضاء وبطاقتين صفراوين

إذا حصلنا على بطاقة بيضاء نسحب أربع كريات من صندوق U

إذا حصلنا على بطاقة صفراء نسحب أربع كريات من صندوق V

نسمي الحادثة A : " الحصول على بطاقة بيضاء "

نسمي الحادثة B : " الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم "

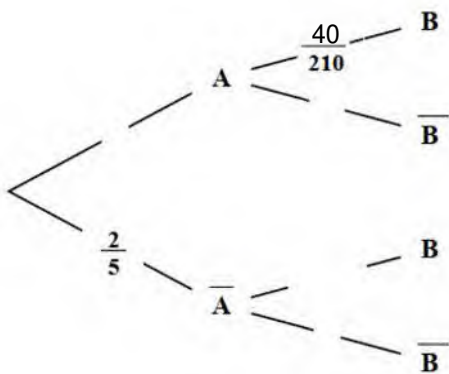
(1) - أنقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها موضحا طريقة الحساب .

(2) - أحسب $P(B)$ ثم أحسب $P_{\bar{B}}(A)$

(3) - ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة

(أ) - عين قيم المتغير العشوائي X ب) - عرف قانون احتماله .

(ج) - احسب الأمل الرياضي $E(X)$ ثم استنتج $E(1445X + 2024)$.



التمرين الثالث: (05 نقاط)

- (1) - $P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث $P(z) = z^3 + 2z^2 - 16$
- (أ) - تحقق أن 2 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$
- (ب) - جد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z - 2)(z^2 + \alpha z + \beta)$
- (ج) - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$
- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A ، B و D
- نقط من المستوي المركب لواقعها على الترتيب : $Z_A = -2 - 2i$ ، $Z_B = 2$ و $Z_D = -2 + 2i$
- (1) أكتب Z_A ، Z_B و Z_D على الشكل الأسّي .
- (2) - احسب اللاحقة Z_C للنقطة C حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .
- (3) - لتكن E صورة C بالدوران الذي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ولتكن F صورة C بالدوران الذي مركزه D وزاويته $\frac{\pi}{2}$
- أحسب Z_E و Z_F لاحقتي النقطتين E و F على الترتيب .
- (3) - أ- بين أن $i = \frac{Z_F - Z_A}{Z_E - Z_A}$
- (ب) - استنتج طبيعة المثلث AEF .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- (I) - نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x - 1 + e^{-x}$
- (1) - أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- (2) - ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .
- (3) - أحسب $g(0)$ ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) \geq 0$
- (II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{x}{x + e^{-x}}$
- وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 2cm)
- (1) - أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، وبين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ثم فسر النتيجة بيانيا .
- (2) - أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x) = \frac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$
- (ب) - استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها
- (3) - أ- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
- (ب) - تحقق أنه من أجل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $x - f(x) = \frac{xg(x)}{1 + g(x)}$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) .
- (ج) - استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها .
- (6) - أرسم (T) و (C_f) .
- (7) - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x : $f(x) = m$
- (III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = f(-|x|)$
- (1) - بين أن الدالة h دالة زوجية
- (2) - أكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.
- (3) - اشرح كيفية انشاء (C_h) المنحني الممثل للدالة h انطلاقا من (C_f) ، ثم أنشئه .