

(المدة : 3 ساعات ونصف)

اختبار في مادة الرياضيات

(النسبة : ملحق تجريبية)

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول z الآتية : $(z^2 + 2z + 4) = 0$ ، $(\bar{z} + 1 - \sqrt{3})$.(II) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.نعتبر النقط A ، B و C التي لاحتقاتها : $z_A = -1 + \sqrt{3}$ ، $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ و $z_C = \bar{z}_B$.① بين أن $z_B - z_A = i(z_C - z_A)$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .② أ) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب L حيث : $L = \left(\frac{z_C - z_A}{z_C} \right)$.ب) أكتب على الشكل الأسّي العدد $z_C - z_A$.ثم بين أن : $L = \frac{\sqrt{6}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$ ، ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ $\tan \frac{\pi}{12}$.③ عين (Δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_A - z}{z_B - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما .

التمرين الثاني : (04 نقاط)

كيس غير شفاف به 9 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس ، منها 4 كريات سوداء تحمل الرقم λ (I) و 3 كريات صفراء تحمل الرقم $(\lambda - 1)$ ، وكرتين بيضاوين تحملان الرقم 1 . (حيث λ عدد طبيعي غير معدوم) نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من هذا الكيس ، ونعتبر الحوادث التالية : A : " سحب كرية بيضاء على الأكثر " . B : " سحب ثلاث كريات تحمل نفس الرقم " . C : " سحب كرتين بالضبط تحمل الرقم $(\lambda - 1)$ " .① أحسب $P(A)$ ، $P(B)$ ثم بين أن $P(C) = \frac{9}{42}$.(II) نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الأرقام المسجلة على الكريات السوداء المسحوبة

والذي يأخذ القيمة 0 إذا كانت كل الكريات ليست سوداء .

① عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X .② عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X .③ أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X بدلالة λ ، ثم حدد قيم λ من أجل $|E(X) - 1| \leq 2$.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

(I) نعتبر (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحددها الأول $u_0 = \alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$

① عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة .

② نفرض فيما يلي : $\alpha = \frac{3}{2}$

أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 2$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة ، واستنتج أنها متقاربة .

(II) لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : ب : $v_n = \ln(u_n - 1)$

① برهن أن المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

② أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

③ نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = \frac{v_0}{2^0} + \frac{v_1}{2^1} + \dots + \frac{v_n}{2^n}$ ، بين أن : $S_n = (-n - 1) \ln 2$.

④ نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S'_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2$. أحسب S'_n بدلالة n .

التمرين الرابع : (08 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ، ب : $g(x) = (x + 1)e^x - e$.

① أدرس تغيرات الدالة g .

② برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,5 < \alpha < 0,6$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

(II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = xe^x - ex + e - 2$: ب : (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد (الوحدة : $\|\vec{i}\| = 4cm$ ، $\|\vec{j}\| = 2cm$)

① أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

② أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها .

③ أ) أثبت أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y = -ex + e - 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) .

ج) بين أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (D) ، يطلب كتابة معادلة له .

④ أ) أنشئ المماس (T) ، ثم المنحنى (C_f) (تعطى $f(\alpha) \simeq 0.2$ ، و $f(1,5) \simeq 3,36$) .

ب) ناقش بياناً ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m + 2 - e)e^{-x} = x$.

⑤ أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة ، احسب $\int_{\lambda}^0 xe^x dx$ ؛ حيث $\lambda < 0$.

ب) احسب بالسنتيمتر المربع $A(\lambda)$: مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين

معادليهما $x = 0$ ، و $x = \lambda$ ؛ حيث $\lambda < 0$ ، ثم تحقق أن $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda) = 8$.

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة ، عينه مع التعليل .

① z عدد مركب شكله الجبري $z = x + iy$. مجموعة حلول المعادلة : $z^2 - z\bar{z} + 2 = 0$ في $\mathbb{C}$ هي :

أ) $S = \{-1; 1\}$ ب) $S = \{-1 + i; 1 + i\}$ ج) $S = \{-i; i\}$

② ليكن المجموع S حيث : $S = 1 + i^2 + i^4 + i^6 + \dots + i^{2024}$ ، i هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له

أ) $S = 0$ ب) $S = 1$ ج) $S = 2024$

③ نعتبر العدد المركب A حيث : $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2024} + i(i)^{1445}$

أ) A حقيقي سالب ب) A حقيقي موجب ج) A تخيلي

④ في المستوى المركب $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقطة B ذات اللاحقة : $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

المجموعة (γ) للنقط M من المستوى ذات اللاحقة z التي تحقق : $|2z + 1 - i| = |1 + i|$ هي :

أ) دائرة مركزها B ونصف قطرها $\sqrt{2}$ ب) دائرة مركزها B ونصف قطرها $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ج) مجموعة خالية

التمرين الثاني : (04 نقاط)

I) لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$

① برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n \leq 2$.

② حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، واستنتج أنها متقاربة ، ثم أحسب نهايتها .

II) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3 + \frac{1}{u_n - 1}$

① بين أن المتتالية (v_n) حسابية ، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

② أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{n+2}{n+1}$

③ أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $S_n = \frac{u_1}{3} + \frac{u_2}{8} + \frac{u_3}{15} + \dots + \frac{u_n}{n(n+2)}$

بين أن : $S_n = \frac{n}{n+1}$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

كيس غير شفاف به 9 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس ، منها 3 كريات حمراء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 2

و 3 كريات خضراء تحمل الأرقام 2 ، 2 ، 3 و كرتين بيضاوين تحملان الرقمين 1 و 3 و كرية سوداء تحمل الرقم 3 .

I) نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من هذا الكيس ، ونعتبر الحوادث التالية :

A : " سحب ثلاث كريات من نفس اللون " .

B : " سحب ثلاث كريات تحمل ألوان العلم الوطني " .

C : " سحب ثلاث كريات تحمل أرقام شعارنا المألوف one ، two ، three " .

① أحسب $P_C(B) = \frac{3}{18}$ ثم بين أن $P(C)$ ، $P(B)$ ، $P(A)$

II) نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب ، عدد الألوان الممكن إيجادها في العلم الفلسطيني .

① برر أن قيم المتغير العشوائي X هي $\{1, 2, 3\}$

② عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X .

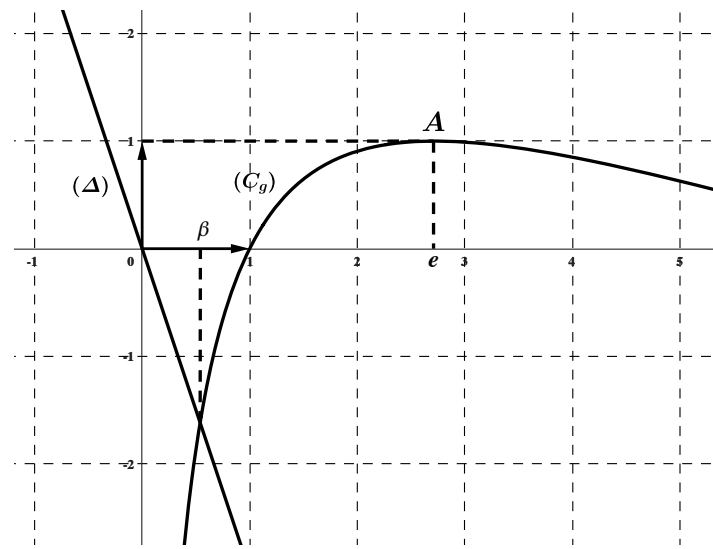
③ أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

(للتذكير : علم دولة فلسطين يتكون من اللون الأبيض والأحمر والأخضر والأسود)

التمرين الرابع : (08 نقاط)

I) لتكن g دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = a(\ln x)^2 + b \ln x$ حيث a و b عددين حقيقيين ثابتين .

(C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) مستقيم معادلته : $y = -3x$



β فاصلة نقطة تقاطع (Δ) و (C_g) كما هو موضح في الشكل .

• نقطة حدية (ذروة) لـ (C_g) .

① أ) عين $g'(x)$ بدلالة a و b .

ب) مما سبق بين أن : $a = -1$ و $b = 2$.

② بقراءة بيانية حدد وضعية (C_g) بالنسبة إلى (Δ) ،

ثم استنتج إشارة $h(x)$ حيث : $h(x) = g(x) + 3x$

على المجال $]0; +\infty[$

II) f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 3 \ln x + \frac{(\ln x)^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

① بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و فسر النتيجة هندسيا ، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

② أ) بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$. $f'(x)$ (الدالة المشتقة للدالة f)

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

③ أ) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 1 والآخر α حيث : $0,3 < \alpha < 0,4$

ب) تأكد أن : $\ln(\alpha) = -3\alpha$.

④ أنشئ (C_f) على المجال $]0; 5]$ (نأخذ $\beta = 0,5$ و $f(\beta) = -1,2$ و $f(5) = 5,3$)

⑤ أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين دالة أصلية للدالة $\ln x \rightarrow x$ والتي تنعدم من أجل $x = e$.

ب) بين أن مساحة حيز المستوي A_α المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $y = 0$ ، $x = \alpha$ و $x = 1$.

هي : $A_\alpha = (-9\alpha^3 - 9\alpha^2 - 3\alpha + 3)u.a$