

عالم موضوع من الموضوعين

الموضوع 01

التمرين الأول : (04 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2x}{ex+1}$

• ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $\begin{cases} u_0 = \frac{5}{4e} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

• الشكل في الورقة المرفقة يمثل المنحنى (C) للدالة f على المجال $[0; +\infty[$ والمستقيم (D) الذي معادلته $y = x$.

(1) أ) مثل على محور الفواصل الحدود ، u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم.

ب) ما تخمينك حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها ؟

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{e} \left(1 - \frac{1}{eu_n + 1} \right)$

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{e}$

ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{eu_n \left(\frac{1}{e} - u_n \right)}{eu_n + 1}$. ثم استنتج اتجاه تغيرها و تقاربها .

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $v_n = \frac{eu_n}{eu_n - 1}$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدها الأول v_0 .

ب) عبر v_n و u_n عن بدالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

ج) أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = \frac{1}{(eu_0 - 1)^2} + \frac{1}{(eu_1 - 1)^2} + \dots + \frac{1}{(eu_n - 1)^2}$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

لكل سؤال ثلاث إجابات ، إجابة واحدة منها صحيحة ، المطلوب : تحديد الإجابة الصحيحة مع التبرير

1 - جذور العدد المركب $-i$ هي :

أ $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} ; -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ب $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ج $-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} ; -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

2 - الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ $h(x) = xe^x$. القيمة المتوسطة للدالة h على المجال $[0 ; 1]$ هي :

أ $\mu = 1$ ب $\mu = e - 1$ ج $\mu = 0$

3 - تتكون مجموعة أشخاص من 8 رجال و 6 نساء ، نريد تكوين 3 أشخاص رئيس و نائب و أمين عام ، عدد اللجان التي تضم رجل و امرأتان

الممكن التحصل عليها بحيث الرئيس أنثى هو :

أ 360 ب 480 ج 240

4 - الشكل الأساسي لحل المعادلة $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$ في مجموعة الأعداد المركبة هي

أ $e^{\frac{5\pi}{6}i} ; e^{\frac{7\pi}{6}i}$ ب $e^{\frac{\pi}{6}i} ; e^{\frac{7\pi}{6}i}$ ج $e^{\frac{2\pi}{3}i} ; e^{\frac{4\pi}{3}i}$

5 - حلول المعادلة التفاضلية $y' + 3y + 6 = 0$ و الذي يحقق $y(0) = 1$ هو الدالة h حيث:

ج. $h(x) = -3e^{-3x} + 4$

ب. $h(x) = 3e^{-3x} + 2$

أ. $h(x) = 3e^{-3x} - 2$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

يحتوي صندوق على ثلاثة أزهار نرد متوازنة ، اثنان منها خضراواتان وفيها ست أوجه مرقمة من 1 إلى 6 وأما الزهر الثالث فلونه أحمر وفيه وجهان يحملان الرقم 1 و أربعة أوجه تحمل الرقم 6 .

نسحب من الصندوق بصفة عشوائية زهر نرد ثم نرميه مرة واحدة و نسجل الرقم الظاهر ، نعتبر الأحداث التالية :

V : زهر النرد المسحوب أخضر ، R : زهر النرد المسحوب أحمر ، S : الرقم الظاهر هو 6 .

(أ) أنقل و أكمل شجرة الاحتمالات المقابلة

(ب) بعد رمي زهر النرد كان الرقم الظاهر هو 6 ، ما احتمال أن يكون لونه أحمر ؟

(ج) احسب احتمال أن يكون زهر النرد أخضر علما أنه يحمل رقم 1 .

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بـ $2a$ إذا كان الرقم الظاهر 6 و a إذا كان عكس ذلك .

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

(ب) عرف قانون الاحتمال لـ X ، و أحسب أمله الرياضي .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

1/ نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = ax^2 + b \ln x$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(D) مماسا لـ (C_g) عند النقطة $A(1, \frac{1}{2})$

1. عين قيمتي a و b .

2. عين اتجاه تغيرات الدالة g واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

نضع $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$

2/ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - 2 + \frac{2 + 2 \ln x}{x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. عين نهاية الدالة f عند 0 و $+\infty$.

2. ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول التغيرات .

3. (أ) أثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

(ب) حدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) في المجال $]0; +\infty[$.

(د) أثبت أنه توجد نقطة وحيدة B للمنحنى (C_f) يكون المماس (T) عندها موازي للمستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلة (T)

4. (أ) برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,5 < \alpha < 0,6$.

(ب) ارسم (C_f) و (Δ) و (T) ($\|\vec{i}\| = 2cm$; $\|\vec{j}\| = 1cm$)

(ج) ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة $(m+1)x - 1 - \ln x = 0$

5. احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيم $y = x - 2$: (D) والمستقيمين اللذين معدلتهما $x = 1$ و $x = e$.

6 . نعتبر الدالة h المعرفة على R^* بـ $h(x) = f(x^2)$

(أ) اكتب $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$

(ب) شكل جدول تغيرات الدالة h .

انتهى الموضوع الأول

نعتبر المتتالية (U_n) الهندسية حدودها موجبة حيث : $\ln(u_2) - \ln(u_4) = 4$ و $\ln(u_1) + \ln(u_5) = -12$

(1) بين أن أساس المتتالية (U_n) هو $q = \frac{1}{e^2}$ ثم عين حدها الأول u_0 .

(2) احسب U_n بدلالة n .

(3) أ- احسب المجموع $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

ب- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

(4) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $V_n = \ln u_n + \ln u_{n+1}$.

أ - بين أن (V_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.

ب - احسب المجموع $S'_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$ حيث :

ت - هل توجد قيمة n حتى يكون $S'_n = 2^{30}$ علل ؟

التمرين الثاني : (05 نقاط)

يحتوي صندوق على خمس كرات بيضاء مرقمة بـ : 1 ، 1 ، 1 ، 0 ، 1 - وخمس كرات سوداء مرقمة بـ : 1 ، 1 ، 0 ، 0 ، 1 - لانميز بينها باللمس ، نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات من الصندوق .

I. نعتبر الأحداث التالية :

A : الحصول على كرة بيضاء واحدة فقط B : الحصول على كرة بيضاء على الأقل

C : الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون D : الحصول على اللونين الأبيض والأسود

F : مجموع أرقام الكرات الثلاث المسحوبة يساوي 0

أحسب احتمال الأحداث A ، B و C .

1 - بين أن : $P(D) = \frac{5}{6}$ ، $P(F) = \frac{31}{120}$ و $P(C \cap F) = \frac{7}{120}$.

2 - إذا كان مجموع أرقام الكرات المسحوبة يساوي 0 ما هو احتمال أن تكون الكرات الثلاث من نفس اللون ؟

3 - X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع الأرقام المتحصل عليها

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

(ب) عين قانون الاحتمال للمتغير X ، أحسب أمله الرياضي.

(ج) استنتج $E(2X + 1)$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. نضع $z_1 = \frac{-3+i}{1+i}$ ، $z_2 = i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^3$ و $z_3 = -1 - 2i$

أ. أكتب على الشكل الجبري كل من الأعداد المركبة z_1 ، z_2 .

ب. أحسب طويلة كل من الأعداد z_1 ، z_2 و z_3 .

2. نضع من أجل كل عدد مركب z : $p(z) = z^3 + z^2 + 3z - 5$

أ. أحسب $p(1)$.

ب. عين العددين الحقيقيين α و β حيث : $p(z) = (z - 1)(z^2 + \alpha z + \beta)$

ت. حل في $\mathbb{C}$ ، مجموعة الأعداد المركبة ، المعادلة $p(z) = 0$.

3. لتكن النقط A ، B و C التي لواحقها $z_A = -1 + 2i$ ، $z_B = 1$ و $z_C = -1 - 2i$.

- أنشئ في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ النقط A ، B و C .
- عين لاحقة النقطة D صورة A بواسطة تحاكي مركزه O ونسبته 3 .
- احسب $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}$
- استنتج طبيعة المثلث ABC .
- عين و انشئ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $|z + 1 - 2i| = 3$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1/ نعتبر الدالة g المعرفة على R بـ : $g(x) = xe^x + 1$

- احسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.
- ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول اشارتها .
- // نعتبر الدالة f المعرفة على R بـ : $f(x) = x - \ln(xe^x + 1)$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. بين أنه من أجل كل x من R : $f(x) = -\ln\left(x + \frac{1}{e^x}\right)$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. - بين أنه من كل x من R ، $f'(x) = \frac{-e^x + 1}{g(x)}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة و شكل جدول تغيراتها .

3. (أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

(ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(ج) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له .

4. (أ) بين أن المنحنى (C) الممثل للدالة $x \mapsto -\ln(x)$ مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

5. أحسب $f(0)$ ثم أرسم (Δ) ، (T) و المنحنيين (C) و (C_f) (حيث المنحنى (C_f) يقع فوق (C_f) من أجل $x \in]0; +\infty[$)

6. عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تكون للمعادلة : $f(x) = x + |m|$ حلين مختلفين .

7. نعتبر الدالة k المعرفة على R بـ $k(x) = \frac{(-1 + x^2)e^x + x + 1}{xe^x + 1}$

(أ) بين أنه من أجل كل x من R ، $\int_0^{x^2} (k(x) - x) dx = -\ln(3 + e^{-3})$

(ب) استنتج A مساحة الحيز المحدد بالمنحنى $(C_{f'})$ محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهمما

$$x = 3 \text{ و } x = 0$$

حيث $(C_{f'})$ منحنى الدالة f' .

إنتهى الموضوع الثاني

كلنا أمل في تفوقكم

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

الموضوع 01

التمرين الأول : (04 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2x}{ex+1}$

• دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$

f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ و f' دالتها المشتقة معرفة

$$f'(x) = \frac{2(ex+1) - e2x}{(ex+1)^2} = \frac{2}{(ex+1)^2}$$

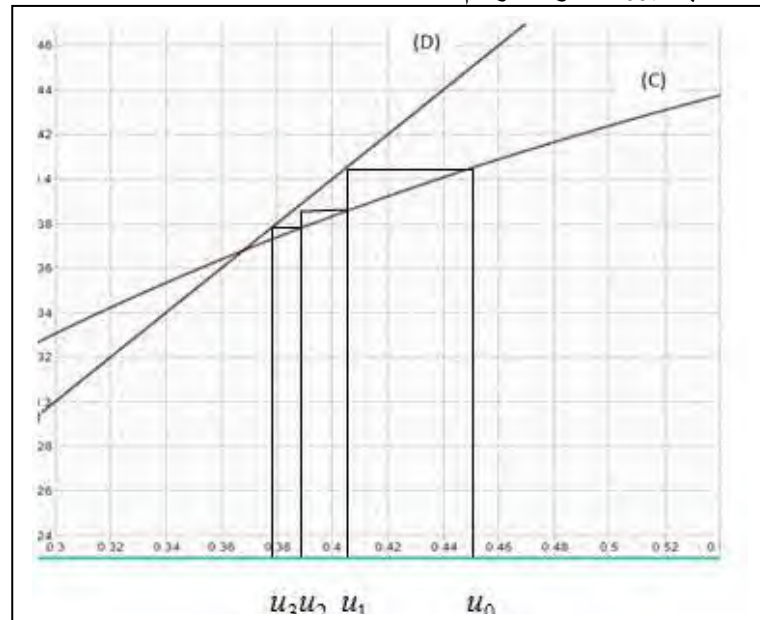
بما أن $f'(x) > 0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على $[0; +\infty[$

$$\begin{cases} u_0 = \frac{5}{4e} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \text{نعتبر المتتالية } (u_n) \text{ المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ}$$

• الشكل في الورقة المرفقة يمثل المنحنى (C) للدالة f على المجال

$[0; +\infty[$ والمستقيم (D) الذي معادلته $y = x$.

(1) أ) تمثيل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم.



ب) تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

بما أن $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ فإن (u_n) متناقصة تماما ومتقاربة نحو

نقطة تقاطع (C) و (D) أي $\frac{1}{e}$

(2) أ) اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{e} \left(1 - \frac{1}{eu_n+1} \right)$

$$\begin{aligned} \frac{2}{e} \left(1 - \frac{1}{eu_n+1} \right) &= \frac{2}{e} \left(\frac{eu_n+1-1}{eu_n+1} \right) \\ &= \frac{2}{e} \left(\frac{eu_n}{eu_n+1} \right) = \frac{2u_n}{eu_n+1} = u_{n+1} \end{aligned}$$

ب) برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{e}$.

$$u_0 = \frac{5}{4e} > \frac{1}{e} \quad \text{ومن } n=0 \text{ من أجل } p(n) \text{ صحة}$$

ومن $p(n)$ محققة من أجل $n=0$

نفرض صحة $p(n)$ أي $u_n > \frac{1}{e}$ و نبهن صحة $p(n+1)$ أي نبهن

$$u_{n+1} > \frac{1}{e}$$

طريقة (1) من فرض $u_n > \frac{1}{e}$ ومنه $eu_n > 1$ ومنه $eu_n + 1 > 2$ ومنه

$$1 - \frac{1}{eu_n+1} > \frac{1}{2} \quad \text{ومن } -\frac{1}{eu_n+1} > -\frac{1}{2} \quad \text{ومن } \frac{1}{eu_n+1} < \frac{1}{2}$$

$$\text{ومن } u_{n+1} > \frac{1}{e} \quad \text{أي } \frac{2}{e} \left(1 - \frac{1}{eu_n+1} \right) > \frac{1}{e}$$

طريقة (2) من فرض $u_n > \frac{1}{e}$ وبما أن f متزايدة تماما على $[0; +\infty[$ فإن

$$u_{n+1} > \frac{1}{e} \quad \text{ومن } f(u_n) > f\left(\frac{1}{e}\right)$$

ومن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $u_n > \frac{1}{e}$ محققة من أجل كل

عدد طبيعي n .

$$\text{ج) اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} - u_n = \frac{eu_n \left(\frac{1}{e} - u_n \right)}{eu_n + 1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{eu_n + 1} - u_n = \frac{2u_n - eu_n^2 - u_n}{eu_n + 1}$$

$$= \frac{u_n - eu_n^2}{eu_n + 1} = \frac{eu_n \left(\frac{1}{e} - u_n \right)}{eu_n + 1}$$

لدينا $0 < \frac{1}{e} - u_n$ ومنه $u_n > \frac{1}{e}$ و $0 > \frac{1}{e} - u_n$ أي $eu_n + 1 > 0$

$u_{n+1} - u_n < 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

لكل سؤال ثلاث إجابات ، إجابة واحدة منها صحيحة ، المطلوب :

تحديد الإجابة الصحيحة مع التبرير

1. جذور العدد المركب $-i$ هي: الإجابة (ب)

التبرير نضع $w^2 = -i$ حيث $w = x + iy$ ومنه

$$\text{تكافئ} \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ أي } x^2 - y^2 + 2xyi = -i$$

$$\begin{cases} 2x^2 = 1 \quad \text{..(1)} \\ 2xy = -1 \quad \text{..(2)} \end{cases} \text{ نحل المعادلة (1) نجد } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ أو } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{وبتعويض } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ في المعادلة (2) فإن } y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{وبتعويض } x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ في المعادلة (2) فإن } y = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ومنه جذور}$$

$$\text{العدد المركب هي } \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ $h(x) = xe^x$. القيمة المتوسطة

للدالة h على المجال $[0; 1]$ هي: الإجابة أ

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{1-0} \int_0^1 xe^x dx & v'(x) &= e^x & v(x) &= e^x \\ &= \int_0^1 xe^x dx & u(x) &= x & u'(x) &= 1 \\ &= xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = (x-1)e^x \Big|_0^1 = 1 \end{aligned}$$

3. تتكون مجموعة أشخاص من 8 رجال و 6 نساء، نريد تكوين 3 أشخاص

رئيس و نائب و أمين عام ، عدد اللجان التي تضم رجل و امرأتان الممكن

التحصل عليها بحيث الرئيس أنثى هو: الإجابة ب

التبرير نضع الحادثة A ، عدد اللجان التي تضم رجل و امرأتان الممكن

التحصل عليها بحيث الرئيس أنثى

$$|A| = 2A_6^2 \times A_8^1 = 2 \times 6 \times 5 \times 8 = 480$$

4. الشكل الأسّي لحلول المعادلة $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$ في مجموعة الأعداد

المركبة هي الإجابة أ

$$\text{نحل المعادلة } z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = -1 = i^2$$

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{3} + i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} :$$

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{3} - i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

$$\text{لدينا } |z_1| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \text{ ومنه } z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ $\frac{1}{e}$ فإنها متقاربة . .

$$(3) \text{ نعتبر المتتالية } (v_n) \text{ المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ } v_n = \frac{eu_n}{eu_n - 1}$$

(أ) اثبات أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 .

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{eu_{n+1}}{eu_{n+1} - 1} = \frac{\frac{e2u_n}{eu_n + 1}}{\frac{e2u_n}{eu_n + 1} - 1} = \frac{\frac{2eu_n}{eu_n + 1}}{\frac{2eu_n - eu_n - 1}{eu_n + 1}} \\ &= \frac{2eu_n}{eu_n - 1} = 2v_n \end{aligned}$$

$$\text{فإن } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } 2 \text{ و } q = 5 \text{ و } v_0 = \frac{eu_0}{eu_0 - 1} = 5$$

$$\text{ب) عبر } v_n \text{ عن بدلالة } n : v_n = 5 \times 2^n$$

$$u_n \text{ بدلالة } n \text{ لدينا } v_n = \frac{eu_n}{eu_n - 1} \text{ ومنه } v_n(eu_n - 1) = eu_n \text{ ومنه}$$

$$ev_n u_n - v_n = eu_n \text{ ومنه } ev_n u_n = v_n + eu_n$$

$$u_n = \frac{v_n}{ev_n - e} \text{ إذن } u_n = \frac{v_n}{e5 \times 2^n - e}$$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 \times 2^n}{e5 \times 2^n - e} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{5 \times 2^n} &= 0 \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 \times 2^n}{5 \times 2^n \left(e - \frac{e}{5 \times 2^n} \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(e - \frac{e}{5 \times 2^n} \right)} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

(ج) أحسب المجموع S_n بدلالة n

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{1}{(eu_n - 1)^2} = \frac{1}{\left(\frac{ev_n}{ev_n - e} - 1 \right)^2} \\ &= \left(\frac{ev_n - e}{e} \right)^2 = (v_n - 1)^2 = v_n^2 - 2v_n + 1 \end{aligned}$$

ومنه :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{(eu_0 - 1)^2} + \frac{1}{(eu_1 - 1)^2} + \dots + \frac{1}{(eu_n - 1)^2} \\ &= w_0 + w_1 + \dots + w_n \\ &= (v_0^2 - 2v_0 + 1) + (v_1^2 - 2v_1 + 1) + \dots + (v_n^2 - 2v_n + 1) \\ &= (v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2) - 2(v_0 + v_1 + \dots + v_n) + 1 + 1 + \dots + 1 \\ &= 25 \left(\frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} \right) - 10 \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \right) + n + 1 \\ &= \frac{25}{3} (4^{n+1} - 1) - 10(2^{n+1} - 1) + n + 1 \end{aligned}$$

ب) بعد رمي زهر النرد كان الرقم الظاهر هو 6 ، حساب احتمال أن يكون لونه أحمر

$$p(S) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{4}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{6}{18}$$

$$p_S(R) = \frac{p(S \cap R)}{p(S)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{4}{6}}{\frac{6}{18}} = \frac{4}{6}$$

ج) حساب احتمال أن يكون زهر النرد أخضر علما أنه يحمل رقم 1 .

$$p(\bar{S}) = \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{12}{18}$$

$$p_{\bar{S}}(V) = \frac{p(V \cap \bar{S})}{p(\bar{S})} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{10}{6}}{\frac{12}{18}} = \frac{10}{12}$$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بـ $-2a$ إذا كان الرقم الظاهر 6 و a إذا كان عكس ذلك .

أ) عين قيم المتغير العشوائي X . $I = \{-2a, a\}$

ب) عرف قانون الاحتمال لـ X ،

$$p(x = -2a) = p(S) = \frac{6}{18}$$

$$p(x = a) = p(\bar{S}) = \frac{12}{18}$$

X_i	$-2a$	a
$p(X=X_i)$	$\frac{6}{18}$	$\frac{12}{18}$

حساب أمله الرياضياتي

$$E(X) = \sum_{i=1}^2 X_i p(X = X_i) = \frac{-12a}{18} + \frac{12a}{18} = 0$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1/ نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي :

$$g(x) = ax^2 + b \ln x$$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد

ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(D) مماسا لـ (C_g) عند النقطة $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$

1. تعيين قيمتي a و b .

لدينا (D) مماسا موازيا لمحور الفواصل لـ (C_g) عند النقطة $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} g(1) = \frac{1}{2} \\ g'(1) = 0 \end{cases} \text{ فإن } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ 2a + b = 0 \end{cases} \text{ حيث } g'(x) = 2ax + \frac{b}{x} \text{ ومنه } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$$

2. عين اتجاه تغيرات الدالة g

$$\arg z_1 = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \setminus k \in \mathbb{Z} \text{ ومنه } \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{x}{|z_1|} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{y}{|z_1|} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$z_1 = e^{\frac{7\pi i}{6}} \text{ إذن}$$

$$|z_2| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \text{ ولدينا } z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \text{ ومنه}$$

$$\arg z_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \setminus k \in \mathbb{Z} \text{ ومنه } \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{x}{|z_2|} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{y}{|z_2|} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$z_2 = e^{\frac{5\pi i}{6}} \text{ إذن}$$

ومنه لشكل الأسّي لحلول المعادلة $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$ في مجموعة الأعداد المركبة هي $e^{\frac{5\pi i}{6}}; e^{\frac{7\pi i}{6}}$

5. حلول المعادلة التفاضلية $y' + 3y + 6 = 0$ و الذي يحقق

$$y(0) = 1$$

لدينا $y' + 3y + 6 = 0$ ومنه $y' = -3y - 6$ ومنه

$$y = ce^{-3x} - \frac{-6}{-3} = ce^{-3x} - 2$$

ايجاد c لدينا $y(0) = 1$ ومنه $c - 2 = 1$ أي $c = 3$

إذن حلول المعادلة التفاضلية $y' + 3y + 6 = 0$ و الذي يحقق

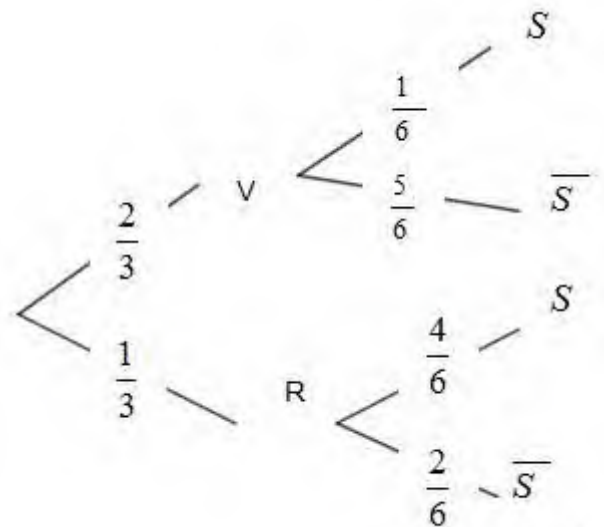
$$y(0) = 1 \text{ هو الدالة } h \text{ حيث } h(x) = 3e^{-3x} - 2$$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر الأحداث التالية: V : زهر النرد المسحوب أخضر ، R : زهر النرد

المسحوب أحمر ، S : الرقم الظاهر هو 6 .

1) أ) الشجرة



g متناقصة تماما على $[0;1]$ و متزايدة تماما على $[1;+\infty]$

إشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty]$ لدينا $\frac{1}{2}$ قيمة حدية صغرى ومنه

$$g(x) \geq \frac{1}{2} \text{ أي } g(x) > 0 \text{ فإن موجبة على } [0;+\infty]$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x \text{ نضع}$$

II / نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0;+\infty]$ كما يلي :

$$f(x) = x - 2 + \frac{2 + 2\ln x}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. عين نهاية الدالة f عند 0 و $+\infty$.

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - 2 + \frac{2 + 2\ln x}{x} \right) = -\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 + 2\ln x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right) = +\infty \end{cases}$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 2 + \frac{2}{x} + \frac{2\ln x}{x} \right) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty \end{cases}$$

2. ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول التغيرات.

f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $[0;+\infty]$ و f' دالتها المشتقة

$$f'(x) = 1 + \left[\frac{\frac{2}{x} \times x - (2 + 2\ln x)}{x^2} \right] \text{ لدينا :}$$

$$= 1 + \left[\frac{2 - (2 + 2\ln x)}{x^2} \right] = \frac{x^2 - 2\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2\left(\frac{1}{2}x^2 - \ln x\right)}{x^2} = \frac{2g(x)}{x^2}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f : بما أن $g(x) > 0$ فإن $f'(x) > 0$

بما أن $f'(x) > 0$ فإن f متزايدة تماما على $[0;+\infty]$

• جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3. أثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 2$ مستقيم مقارب مائل

• للمنحنى (C_f) .

• لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 + 2\ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{2\ln x}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) في المجال $[0;+\infty]$

$$\text{ندرس إشارة الفرق } f(x) - y = \frac{2 + 2\ln x}{x} \cdot f(x) - y$$

• جدول إشارة الفرق :

$$f(x) - y = 0 \text{ معناه } (2 + 2\ln x) = 0 \text{ ومنه } 1 + \ln x = 0 \text{ أي}$$

$$\ln x = -1 \text{ وبالتالي } x = e^{-1}$$

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$1 + \ln x$	-	0	+
$f(x) - y$	-	0	+
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ) (C_f) فوق (Δ) (C_f) يقطع (Δ)		

د) أثبات أنه توجد نقطة وحيدة B للمنحنى (C_f) يكون المماس (T)

عندها موازي للمستقيم (Δ)

المماس (T) عندها موازي للمستقيم (Δ) معناه $f'(x) = 1$ ومنه

$$\frac{x^2 - 2\ln x}{x^2} = 1 \text{ ومنه } x = 1 \text{ معادلة } (T) \text{ هي}$$

$$(T) : y = f'(x)(x - 1) + f(1) \\ y = x$$

3. أ) برهان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث :

$$0.5 < \alpha < 0.6$$

تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث

$$0.5 < \alpha < 0.6$$

• لدينا f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[0.5; 0.6]$

• ولدينا : $f(0.5) \times f(0.6) < 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا

وحيدا α حيث $0.5 < \alpha < 0.6$

ب) رسم (C_f) و (Δ) و (T) ($\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$; $\|\vec{j}\| = 1\text{cm}$)

6. نعتبر الدالة h المعرفة على R^* بـ $h(x) = f(x^2)$

(أ) بدلالة $h'(x)$

$$h'(x) = 2xf'(x^2)$$

• النهايات

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2) = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{cases} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^2) = -\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2) = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \end{cases} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2) = -\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{cases} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x^2) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{cases} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x^2) = +\infty$$

• دراسة اتجاه تغير الدالة

لدينا $f'(x) > 0$ من أجل $x > 0$

أي لدينا $f'(x^2) > 0$ من أجل $x^2 > 0$ أي

$$x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

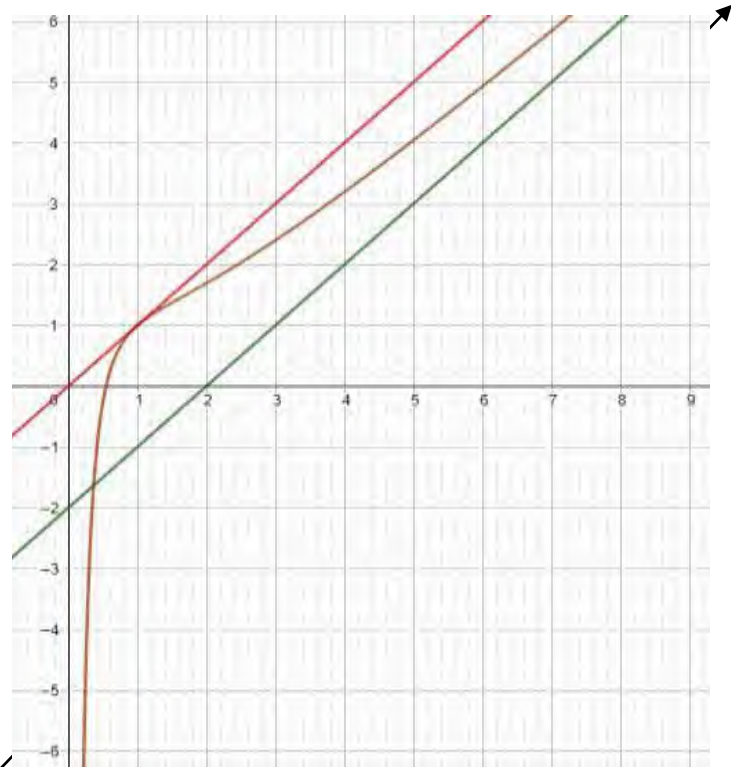
ومنه إشارة $h'(x)$ من إشارة x

أي من أجل $x \in]0; +\infty[$ فإن $h'(x) > 0$ ومنه h متزايدة تماما على $]0; +\infty[$

و من أجل $x \in]-\infty; 0[$ فإن $h'(x) < 0$ ومنه h متناقصة تماما على $]-\infty; 0[$

(ب) جدول تغيرات الدالة h .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-		+
$h(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↗ $-\infty$



(ج) مناقشة بياننا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة

$$(m+1)x - 1 - \ln x = 0$$

$$(m+1)x - 1 - \ln x = 0 \quad \text{معناه} \quad mx + x - 1 - \ln x = 0 \quad \text{ومنه}$$

$$-x + 1 + \ln x = mx \quad \text{ومنه} \quad -2x + 2 + 2\ln x = 2mx$$

$$-2 + \frac{2 + 2\ln x}{x} = 2m \quad \text{ومنه} \quad x - 2 + \frac{2 + 2\ln x}{x} = x + 2m$$

$$f(x) = x + 2m$$

حلول المعادلة $f(x) = x + 2m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع

المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y_m = x + 2m$

العدد	m	$2m$
حل وحيد	$]-\infty; -1]$	$]-\infty; -2]$
حليْن مختلفين	$]-1; 0[$	$]-2; 0[$
حل وحيد	0	0
لا يوجد حل	$]0; +\infty[$	$]0; +\infty[$

5. احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيم

$(D): y = x - 2$ والمستقيمين اللذين معدلتهما $x = 1$ و $x = e$.

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e |f(x) - y| dx \|\vec{i}\| \|\vec{j}\| \\ &= \int_1^e \left(\frac{2 + 2\ln x}{x} \right) dx \|\vec{i}\| \|\vec{j}\| \\ &= \int_1^e \left(\frac{2}{x} + \frac{2 + 2\ln x}{x} \right) dx \|\vec{i}\| \|\vec{j}\| \\ &= \left[2\ln|x| + (\ln|x|)^2 \right]_1^e \|\vec{i}\| \|\vec{j}\| = 6 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

نعتبر المتتالية (U_n) الهندسية حدودها موجبة حيث :

$$\begin{cases} \ln(u_2) - \ln(u_4) = 4 & \dots (1) \\ \ln(u_1) + \ln(u_5) = -12 & \dots (2) \end{cases}$$

1. اثبات أن أساس المتتالية (U_n) هو $q = \frac{1}{e^2}$

لدينا $u_4 = u_2 q^2$ وبتعويض في المعادلة (1) نجد

$$\ln(u_2) - \ln(u_2 q^2) = 4 \text{ أي } \ln\left(\frac{u_2}{u_2 q^2}\right) = 4 \text{ ومنه } \ln\left(\frac{1}{q^2}\right) = 4$$

$$\frac{1}{q^2} = e^4 \text{ ومنه } q^2 = \frac{1}{e^4} \text{ ومنه } q = -\frac{1}{e^2} \text{ أو } q = \frac{1}{e^2} \text{ مرفوض لأن } (U_n)$$

حدودها موجبة ومنه $q = \frac{1}{e^2}$

تعيين حددها u_0

لدينا $u_1 = u_0 q$ و $u_5 = u_0 q^5$ بتعويض في المعادلة (2) نجد

$$\ln(u_0 q) + \ln(u_0 q^5) = -12 \text{ ومنه } \ln(u_0^2 q^6) = -12 \text{ ومنه } u_0^2 q^6 = e^{-12}$$

$$u_0^2 = e^{-12} \text{ ومنه } u_0 = -1 \text{ أو } u_0 = 1 \text{ أي } u_0^2 = 1 \text{ ومنه } u_0 = 1 \text{ مرفوض لأن } (U_n)$$

حدودها موجبة ومنه $u_0 = 1$

2. احسب U_n بدلالة n .

$$u_n = u_0 q^n = e^{-2n}$$

3. أ- احسب المجموع $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

$$S_n = u_0 \left(\frac{1 - (q)^{n+1}}{1 - q} \right) = \left(\frac{1 - (e^{-2})^{n+1}}{1 - e^{-2}} \right)$$

ب- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - (e^{-2})^{n+1}}{1 - e^{-2}} \right) = \frac{1}{1 - e^{-2}}$$

$$0 < e^{-2} < 1 ; \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-2})^{n+1} = 0$$

4. لتكن المتتالية (V_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ :

$$V_n = \ln u_n + \ln u_{n+1}$$

أ- بين أن (V_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \ln u_{n+1} + \ln u_{n+2} - (\ln u_n + \ln u_{n+1}) \\ &= \ln u_{n+2} - \ln u_n = \ln(e^{-2(n+2)}) - \ln e^{-2n} \\ &= -2n - 4 + 2n = -4 \end{aligned}$$

$$v_0 = \ln u_0 + \ln u_1 = -2 \text{ و } r = -4$$

ب- احسب المجموع S'_n حيث :

$$S'_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

$$S'_n = \frac{n+1}{2} (v_0 + v_n) = \frac{n+1}{2} (-2 - 4n - 2) = -2(n+1)^2$$

لا توجد قيمة لـ n بحيث $S'_n = 2^{30}$ لأن $S'_n < 0$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

يحتوي صندوق على خمس كرات بيضاء مرقمة بـ : 1، 1، 1، 0، -1 وخمس كرات سوداء مرقمة بـ : 1، 1، 0، 0، -1 لانميز بينها باللمس ، نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات من الصندوق .

حساب إحتمال الأحداث A ، B و C .

$$|\Omega| = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = 120$$

A : الحصول على كرة بيضاء واحدة فقط $A = \{(B, N, N)\}$

$$p(A) = \frac{C_5^1 C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

B : الحصول على كرية بيضاء على الأقل

$$B = \{(B, N, N); (B, B, N); (B, B, B)\}$$

$$p(B) = \frac{C_5^1 C_5^2 + C_5^2 C_5^1 + C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{110}{120} = \frac{11}{12}$$

C : الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون

$$C = \{(N, N, N); (B, B, B)\}$$

$$p(C) = \frac{C_5^3 + C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

D : الحصول على اللونين الأبيض والأسود

$$D = \{(B, N, N); (B, B, N)\}$$

$$p(D) = \frac{C_5^1 C_5^2 + C_5^2 C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{100}{120} = \frac{5}{6}$$

$$p(D) = 1 - p(C) = \frac{5}{6}$$

F : مجموع أرقام الكرات الثلاث المسحوبة يساوي 0

$$F = \{(0, 0, 0); (-1, 0, 1)\}$$

$$p(F) = \frac{C_3^3 + C_2^1 C_3^1 C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{31}{120}$$

$C \cap F$: مجموع الكرات المسحوبة معدوم وفي نفس لون

$$C \cap F = \{(B_0, B_1, B_{-1}); (N_0, N_1, N_{-1})\}$$

$$p(C \cap F) = \frac{C_1^1 C_3^1 C_1^1 + C_1^1 C_2^1 C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{7}{120}$$

حساب إحتمال أن تكون الكرات الثلاث من نفس اللون علما أن

مجموع أرقام الكرات المسحوبة يساوي 0 $p_F(C)$

$$p_F(C) = \frac{p(C \cap F)}{p(F)} = \frac{\frac{7}{120}}{\frac{31}{120}} = \frac{7}{31}$$

X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع الأرقام المتحصل عليها

$$I = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$p(x = -2) = \frac{C_2^2 C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{120} \quad \leftarrow x = -2 \quad \leftarrow \{(-1, -1, 0)\}$$

$$p(x = -1) = \frac{C_2^1 C_3^2 + C_2^2 C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{11}{120} \quad \leftarrow x = -1 \quad \leftarrow \{(-1, 0, 0), (-1, -1, 1)\}$$

$$p(x = 0) = p(F) = \frac{31}{120} \quad \leftarrow x = 0 \quad \leftarrow \{(0, 0, 0), (-1, 0, 1)\}$$

$$p(x = 1) = \frac{C_5^1 C_3^2 + C_5^2 C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{35}{120} \quad \leftarrow x = 1 \quad \leftarrow \{(1, 0, 0), (-1, 1, 1)\}$$

$$p(x = 2) = \frac{C_3^1 C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{30}{120} \quad \leftarrow x = 2 \quad \leftarrow \{(1, 1, 0)\}$$

$$p(x = 3) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{10}{120} \quad \leftarrow x = 3 \quad \leftarrow \{(1, 1, 1)\}$$

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$p(x = x_i)$	$\frac{3}{120}$	$\frac{11}{120}$	$\frac{31}{120}$	$\frac{35}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{10}{120}$

أحسب أمله الرياضياتي.

$$E(X) = \sum_{i=1}^6 x_i p(x = x_i) = \frac{9}{10}$$

$$E(2X + 1) = 2E(X) + 1 = \frac{14}{5}$$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$$1. \text{ نضع } z_3 = -1 - 2i \text{ و } z_2 = i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^3, z_1 = \frac{-3 + i}{1 + i}$$

أ. الشكل الجبري الأعداد المركبة z_2, z_1 .

$$z_1 = \frac{(-3 + i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{-3 + 3i + i + 1}{1 + 1} = \frac{-2 + 4i}{2} = -1 + 2i$$

$$z_2 = i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^3$$

$$= i \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 + 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \left(-\frac{i}{2} \right) + 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(-\frac{i}{2} \right)^2 + \left(-\frac{i}{2} \right)^3 \right)$$

$$= i \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{9i}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{8} \right) = i(-i) = 1$$

ب. حساب طولية الأعداد z_2, z_1, z_3 .

$$|z_1| = |-1 + 2i| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$|z_2| = |1| = 1$$

$$|z_3| = |-1 - 2i| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

2. نضع من أجل كل عدد مركب z : $p(z) = z^3 + z^2 + 3z - 5$.

$$أ. حساب $p(1)$.$$

ب. عين العددين الحقيقيين α و β حيث:

$$p(z) = (z - 1)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

$$(z - 1)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

$$\text{لدينا } z^3 + z^2(\alpha - 1) + z(\beta - \alpha) - \beta = p(z) \text{ ومنه بالمطابقة}$$

$$\text{نجد } \alpha = 2 \text{ و } \beta = 5$$

ج. حل في $\mathbb{C}$ ، مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة $p(z) = 0$.

$$p(z) = 0 \text{ ومنه } (z - 1)(z^2 + 2z + 5) = 0$$

$$z^2 + 2z + 5 = 0 \text{ أو } z - 1 = 0 \text{ ومنه مجموعة حلول المعادلة}$$

$$p(z) = 0 \text{ هي } \{-1 + 2i, -1 - 2i, 1\}$$

3. لتكن النقط A, B, C التي لواحقتها $z_A = -1 + 2i, z_B = 1$

$$\text{و } z_C = -1 - 2i.$$

• أنشئ في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ النقط A, B, C .

• النقطة D صورة A بواسطة تحاكي مركزه O ونسبته 3.

$$z_D = 3z_A = 3(-1 + 2i) = -3 + 6i \text{ معناه } z_D - z_O = 3(z_A - z_O)$$

$$\text{ومنه } D(3; 6)$$

$$\bullet \text{ احسب } \frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}$$

$$\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = \frac{1 - (-1 + 2i)}{1 - (-1 - 2i)} = \frac{(2 - 2i)(2 - 2i)}{(2 + 2i)(2 - 2i)} = -i$$

• استنتج طبيعة المثلث ABC .

$$\text{لدينا } \left| \frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} \right| = |-i| = 1 \text{ أي } AB = BC \text{ ومنه } ABC \text{ مثلث}$$

متساوي الساقين (1)

$$\text{ولدينا } \arg \left(\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} \right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

$$(2) \text{ ومنه المثلث } ABC \text{ قائم } \left(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{AB} \right) = -\frac{\pi}{2}$$

من (1) و (2) نستنتج أن ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين في A .

• تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق:

$$|z + 1 - 2i| = 3$$

$$|z - (-1 + 2i)| = 3 \text{ معناه } |z + 1 - 2i| = 3$$

$$|z - z_A| = 3 \text{ ومنه } AM = 3$$

ومنه مجموعة النقط هي دائرة مركزها A و نصف قطرها $r = 3$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1/ نعتبر الدالة g المعرفة على R بـ: $g(x) = xe^x + 1$

• حساب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x + 1 = 1 \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 0$$

• دراسة اتجاه تغير الدالة g

g دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على R و g' دالتها المشتقة معرفة بـ

$$g'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

$$g'(x) = 0 \text{ معناه } x = 0$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

أي من أجل $x \in]-1; +\infty[$ فإن $g'(x) > 0$ ومنه g متزايدة تماما على

$$]-1; +\infty[$$

و من أجل $x \in]-\infty; -1]$ فإن $g'(x) < 0$ ومنه g متناقصة تماما على

$$]-\infty; -1]$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	1	$g(-1)$	$+\infty$

بما أن $g(-1)$ قيمة حدية صغرى فإن $g(x) \geq g(-1)$ ومنه

$$g(x) > 0 \text{ موجبة تماما على } R$$

2/ نعتبر الدالة f المعرفة على R بـ: $f(x) = x - \ln(xe^x + 1)$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. اثبات أنه من أجل كل x من R بـ: $f(x) = -\ln\left(x + \frac{1}{e^x}\right)$

$$-\ln\left(x + \frac{1}{e^x}\right) = -\ln\left(\frac{xe^x + 1}{e^x}\right)$$

$$= -\left[\ln(xe^x + 1) - \ln(e^x)\right]$$

$$= -\ln(xe^x + 1) + x = f(x)$$

حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln\left(x + \frac{1}{e^x}\right) = -\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{e^x}\right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln(X) = -\infty \end{cases}$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \ln(xe^x + 1)\right) = -\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(X) = 0 \end{cases}$$

$$2. \text{ اثبات أنه من كل } x \text{ من } R, f'(x) = \frac{-e^x + 1}{g(x)}$$

f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على R و f' دالتها المشتقة

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{(xe^x + 1)'}{xe^x + 1} = \frac{xe^x + 1 - e^x - xe^x}{xe^x + 1} \\ &= \frac{1 - e^x}{xe^x + 1} = \frac{1 - e^x}{g(x)} \end{aligned}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $1 - e^x$ لأن $g(x) > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

أي من أجل $x \in]0; +\infty[$ فإن $f'(x) < 0$ ومنه f متناقصة تماما على

$$]0; +\infty[$$

و من أجل $x \in]-\infty; 0]$ فإن $f'(x) > 0$ ومنه g متزايدة تماما على

$$]-\infty; 0]$$

جدول تغيراتها.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

3. اثبات أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى

(C_f) عند $-\infty$.

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \ln(xe^x + 1) - x) = 0$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(X) = 0 \end{cases}$$

(ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم.

$$- \ln(xe^x + 1) = 0 \text{ ومنه } xe^x + 1 = 1 \text{ ومنه } xe^x = 0 \text{ أي}$$

$$x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - x$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

(ج) اثبات أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ)

$$f'(x) = 1 \text{ معناه } \frac{1 - e^x}{xe^x + 1} - 1 = 0 \text{ ومنه } \frac{1 - e^x - xe^x - 1}{xe^x + 1} = 0 \text{ ومنه}$$

$$\frac{(-1 - x)e^x}{xe^x + 1} = 0 \text{ ومنه } -1 - x = 0 \text{ معناه } x = -1$$

$$(T): y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$$

$$y = x + 1 - \ln(-1 + e)$$

1.4. إثبات أن المنحنى (C) الممثل للدالة $x \mapsto -\ln(x)$ مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + \ln x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\ln x - \ln \left(\frac{xe^x + 1}{e^x} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\frac{xe^x}{xe^x + 1} \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

5. $f(0) = 0$ ثم أرسم (Δ) , (T) و المنحنيين (C) و (C_f)



6. تعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تكون للمعادلة:

$$f(x) = x + |m| \text{ حلين مختلفين.}$$

المعادلة: $f(x) = x + |m|$ حلين مختلفين من أجل

$$]-1 + \ln(-1 + e); 1 - \ln(-1 + e)[\text{ أي } |m| < 1 - \ln(-1 + e)$$

7. نعتبر الدالة k المعرفة على R بـ $k(x) = \frac{(-1 + x^2)e^x + x + 1}{xe^x + 1}$

(أ) اثبات أنه من أجل كل x من R , $\int_0^{C_3^2} (k(x) - x) dx = -\ln(3 + e^{-3})$

$$\begin{aligned} \int_0^{C_3^2} (k(x) - x) dx &= \int_0^3 \left(\frac{(-1 + x^2)e^x + x + 1 - xe^x - 1}{xe^x + 1} \right) dx \\ &= \int_0^3 f'(x) dx = [f(x)]_0^3 = -\ln(3 + e^{-3}) \end{aligned}$$

(ب) ستنتج A مساحة الجيز المحدد بالمنحنى (C_f) محور الفواصل

والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = 0$ و $x = 3$

$$\int_0^3 |f'(x)| dx = -\int_0^3 f'(x) dx = -[f(x)]_0^3 = \ln(3 + e^{-3})$$